

QCD-Stromkorrelatoren und Quarkmassenbestimmung

Zur Erlangung des akademischen Grades eines
DOKTORS DER NATURWISSENSCHAFTEN
von der Fakultät für Physik des
Karlsruher Instituts für Technologie

genehmigte

DISSERTATION

von

Dipl.-Phys. Andreas Maier
aus Schramberg

Tag der mündlichen Prüfung:	29. Oktober 2010
Referent:	Prof. Dr. J.H. Kühn
Korreferent:	Prof. Dr. M. Steinhauser

Inhaltsverzeichnis

1	Stromkorrelatoren in der Quantenchromodynamik	1
1.1	Einleitung	1
1.2	Konventionen	3
2	Quarkmassenbestimmung aus Stromkorrelatoren	9
2.1	Quarkmassen aus experimentellen Daten	10
2.2	$R(s)$ und experimentelle Momente	10
2.3	Theoretische Momente	17
2.3.1	Momente diagonaler Korrelatoren	17
2.3.2	Momente nichtdiagonaler Korrelatoren	40
2.4	Ergebnisse für Charm- und Bottommassen	46
2.4.1	Massen aus experimentellen Daten	46
2.4.2	Massen aus Gittersimulationen	53
2.5	Zusammenfassung	53
3	Stromkorrelatoren im Ortsraum	55
3.1	Konventionen	56
3.2	Fourier-Transformation	56
3.2.1	Fourier-Transformation in d Dimensionen	56
3.2.2	Nichttriviale Lorentzstrukturen	57
3.2.3	Fourier-Transformation renormierter Korrelatoren	58
3.3	Renormierung im Ortsraum	59
3.3.1	$\overline{\text{MS}}$ -artige Schemata	59
3.3.2	Gitterrenormierung	60
3.4	Zusammenfassung	66
A	Diagonale Korrelatoren	67
A.1	Niederenergieentwicklung	67
A.2	Schwellenentwicklung	75
A.3	Hochenergieentwicklung	77
A.4	Abschätzungen aus Padé-Approximation	91
A.5	Die Baker-Gammel-Wills-Vermutung	96

B Nichtdiagonale Korrelatoren	97
B.1 Niederenergieentwicklung	97
B.2 Hochenergieentwicklung	102
C Korrelatoren im Ortsraum	111
C.1 Herleitung der Fourier-Transformation	111
C.2 Masselose Korrelatoren	112
D Renormierungsgruppenentwicklung	115
D.1 Renormierungsgruppengleichungen	115
D.2 Anomale Dimensionen	116
D.3 Renormierungsschemata	117

Kapitel 1

Stromkorrelatoren in der Quantenchromodynamik

1.1 Einleitung

*Thou marvell'st at my words: but hold thee still;
Things bad begun make strong themselves by ill;
So, pr'ythee, go with me*

– W. Shakespeare, *MacBeth*, Act III, Scene 2

Wissenschaftlicher Fortschritt führt naturgegeben zu einer zunehmenden Komplexität der durchgeführten Experimente: Phänomene, die sich durch einfache Experimente oder sogar durch reine Naturbeobachtungen entdecken lassen, werden offensichtlich verhältnismäßig früh gefunden. Ähnlich verhält es sich mit der theoretischen Beschreibung der grundlegenden Prinzipien, die zunehmend abstrakter wird und sich immer weiter von der üblichen menschlichen Alltagserfahrung entfernt.

Ein aktuelles Beispiel für diese Entwicklung ist der Bau und die Inbetriebnahme des Large Hadron Collider (LHC) und der zugehörigen Detektoren am CERN. Mit diesem wohl aufwändigsten aller bisher durchgeführten Beschleunigerexperimente sollen neue physikalische Phänomene entdeckt werden, die entweder die derzeitige theoretische Beschreibung durch das so genannte Standardmodell bestätigen oder um neue Aspekte erweitern.

Dominant für die am LHC stattfindenden Prozesse ist die starke Wechselwirkung, welche das Verhalten der kollidierenden Protonen und ihrer elementaren Bestandteile, der Quarks und Gluonen, bestimmt. Diese Wechselwirkung wird durch die Theorie der Quantenchromodynamik (QCD) beschrieben. An der QCD zeigt sich auch die zunehmend kompliziertere Struktur fundamentaler Theori-

en: Zwar wird erwartet, dass die QCD prinzipiell ein sehr breites Spektrum von Phänomenen beschreibt, aus ihr konkrete experimentelle Vorhersagen abzuleiten ist jedoch sehr schwierig. In der Praxis werden hierfür verschiedene Näherungsverfahren und Modelle, wie beispielsweise klassische Störungstheorie, Gittereichtheorie, Summenregeln, chirale Störungstheorie und AdS/QCD-Modelle verwendet, die sich in ihren jeweiligen Anwendungsgebieten und der Nähe zur eigentlich zugrundeliegenden QCD unterscheiden.

Um überhaupt Voraussagen treffen zu können, müssen zunächst die fundamentalen Parameter der QCD, also die Kopplungskonstante und die Massen der relevanten Quarks möglichst exakt bestimmt werden. Leider zeigt sich auch hier der im Vergleich zu älteren physikalischen Theorien hohe Abstraktionsgrad der QCD: Die Masse eines Apfels in der klassischen Mechanik ist eine leicht zugängliche Größe und kann experimentell einfach bestimmt werden. Die Massen der Quarks in der QCD dagegen können kaum anschaulich verstanden werden und der Zusammenhang mit experimentellen Messungen ist weit weniger offensichtlich.

Einer der Hauptgründe für die konzeptionelle Schwierigkeit bei der Interpretation der Quarkmassen besteht darin, dass Quarks nur in stark gebundenen Zuständen, den Hadronen, auftreten und nicht isoliert beobachtet werden können. Aus den Massen der Hadronen direkt auf die Massen der Quarks zu schließen, erweist sich jedoch als äußerst schwierig, sodass häufig andere Ansätze gewählt werden.

Um die Parameter einer Theorie zu extrahieren, empfiehlt es sich, theoretisch und experimentell möglichst gut verstandene Systeme zu betrachten. Der wohl einfachste Prozess, in dem die starke Wechselwirkung beobachtet werden kann, ist die inklusive¹ Erzeugung von Hadronen durch Kollisionen von Elektronen mit Positronen. Dieser Prozess wird bereits seit Jahrzehnten an entsprechenden Beschleunigern studiert, sodass ausreichende Messdaten zur Verfügung stehen. Für die Beschreibung aus theoretischer Sicht eignen sich insbesondere die in dieser Arbeit betrachteten QCD-Stromkorrelatoren.

Im folgenden Abschnitt 1.2 werden die Stromkorrelatoren eingeführt und die verwendeten Konventionen erläutert. In Kapitel 2 wird beschrieben, wie aus den Korrelatoren durch Vergleich mit experimentellen Daten die Massen von Charm- und Bottomquarks mit hoher Präzision bestimmt werden können. Abschließend wird in Kapitel 3 die Darstellung im Ortsraum hergeleitet und der Zusammenhang zwischen störungstheoretisch und auf dem Gitter berechneten Korrelatoren diskutiert.

¹Inklusiv bedeutet hier, dass es keine weiteren Einschränkungen an die erzeugten Hadronen gibt.

1.2 Konventionen

In dieser Arbeit werden zunächst die diagonalen Vektor-, Axialvektor-, skalaren und pseudoskalaren Quarkströme betrachtet. Ihre jeweiligen Definitionen lauten

$$j_\mu^v = \bar{\psi}\gamma_\mu\psi, \quad j_\mu^a = \bar{\psi}\gamma_\mu\gamma_5\psi, \quad j^s = \bar{\psi}\psi, \quad j^p = i\bar{\psi}\gamma_5\psi. \quad (1.1)$$

ψ ist ein Quarkfeld mit Masse m_q . Die den Strömen entsprechenden Korrelatoren sind folgendermaßen definiert:

$$\begin{aligned} \Pi_{\mu\nu}^\delta(q^2) &= i \int dx e^{iqx} \langle 0 | T j_\mu^\delta(x) j_\nu^\delta(0) | 0 \rangle \quad \text{für } \delta \in \{v, a\}, \\ \Pi_1^\delta(q^2) &= i \int dx e^{iqx} \langle 0 | T j^\delta(x) j^\delta(0) | 0 \rangle \quad \text{für } \delta \in \{s, p\}. \end{aligned} \quad (1.2)$$

In der Praxis ist es oft hilfreich, skalare, dimensionslose Größen zu verwenden. Zu diesem Zweck können Polarisationsfunktionen $\Pi^\delta(q^2)$ und $\Pi_L^\delta(q^2)$ eingeführt werden:

$$\begin{aligned} \Pi_{\mu\nu}^\delta(q^2) &= (-q^2 g_{\mu\nu} + q_\mu q_\nu) \Pi^\delta(q^2) + q_\mu q_\nu \Pi_L^\delta(q^2) \quad \text{für } \delta \in \{v, a\}, \\ \Pi_1^\delta(q^2) &= q^2 \Pi^\delta(q^2) \quad \text{für } \delta \in \{s, p\}. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Aufgrund der Ward-Identitäten verschwindet die longitudinale Vektorpolarisationsfunktion, d.h. $\Pi_L^v(q^2) = 0$. Die longitudinale Polarisationsfunktion des Axialvektorkorrelators ergibt sich aus der pseudoskalaren Polarisationsfunktion:

$$q^2 \Pi_L^a(q^2) = 4m_q^2 \left(\Pi^p(q^2) - q^2 \left[\frac{\partial \Pi^p(q^2)}{\partial q^2} \right]_{q^2=0} \right)$$

Die Polarisationsfunktionen lassen sich in eine Störungsreihe der Form

$$\Pi^\delta(q^2) \sim \sum_{i=0}^{\infty} \Pi^{(i),\delta}(q^2) a_s^i, \quad (1.4)$$

entwickeln, wobei der Entwicklungsparameter a_s proportional zur starken Kopplungskonstanten gewählt wird:

$$a_s = \frac{\alpha_s}{\pi} = \frac{g_s^2}{4\pi^2}. \quad (1.5)$$

Die Koeffizienten $\Pi^{(i),\delta}(q^2)$ entsprechen Diagrammen mit $i+1$ Schleifen. Ab dem Dreischleifenniveau treten Diagramme auf, die vollständig gluonische Schnitte aufweisen (siehe Abbildung 1.1). Da diese Diagramme in den Störungsentwicklungen der Stromkorrelatoren mit nichtdiagonaler Flavourstruktur nicht auftreten, werden sie auch als *Singulett*diagramme bezeichnet. Die Beiträge der Singulett

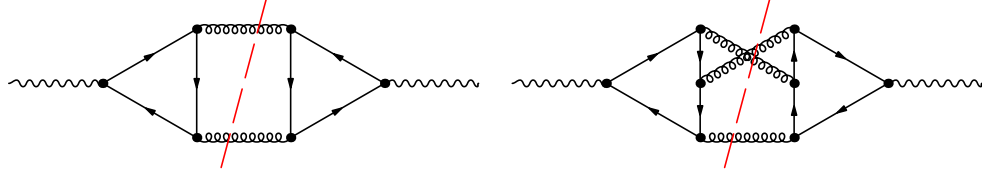


Abbildung 1.1: Beispiele für Singulett-diagramme in der Störungsentwicklung der Polarisationsfunktionen.

betrachteten phänomenologischen Anwendungen weniger interessant; sie werden im Folgenden nicht weiter berücksichtigt. Einzelne Ergebnisse zu Singulettbeiträgen sind in Anhang A.1 angegeben.

Bei der Berechnung der Polarisationsfunktionen treten zunächst Divergenzen auf, die in dimensionaler Regularisierung mit $d = 4 - 2\epsilon$ Dimensionen Polen der Form $1/\epsilon^n$ mit $n \in \mathbb{N}$ entsprechen. Aus den sich ergebenden nackten Polarisationsfunktionen $\Pi_0^\delta(q^2)$ erhält man über

$$\Pi^\delta(q^2) = (Z^\delta)^2 \Pi_0^\delta(q^2) + (\mu^2)^{-\epsilon} Z^{\delta\delta} \quad (1.6)$$

renormierte Polarisationsfunktionen, die im Limes $d \rightarrow 4$ endlich sind. Die additive Renormierungskonstante $Z^{\delta\delta}$ wird über die On-shell-Bedingung $\Pi^\delta(0) = 0$ festgelegt. Die Renormierung der Quarkmasse m_q erfolgt an einigen Stellen im On-shell-Schema und an anderen im $\overline{\text{MS}}$ -Schema; ist bei einer Formel eines der beiden Schemata ausdrücklich angegeben, so bezieht sich dies immer auf die Massenrenormierung. Explizite Formeln für die Umrechnung zwischen beiden Schemata sind in Anhang D.3 aufgeführt. Der Vektorstrom und der Axialvektorstrom werden nicht renormiert, d.h. $Z^v = Z^a = 1$. Die Stromrenormierung des skalaren und des pseudoskalaren Stroms wird in dieser Arbeit stets im selben Schema durchgeführt wie die Massenrenormierung. Für die Renormierung der starken Kopplungskonstanten wird das $\overline{\text{MS}}$ -Schema verwendet.

In den Polarisationsfunktionen treten im Wesentlichen² lediglich zwei Energieskalen auf: Der äußere Impuls q und die Quarkmasse m_q . Es erweist sich häufig als günstig, die Kinematik über die dimensionslose Variable

$$z = \frac{q^2}{4m_q^2} \quad (1.7)$$

zu beschreiben.

Da eine exakte Berechnung der Polarisationsfunktionen für beliebige Werte von z in höheren Ordnungen der Störungstheorie nicht mehr möglich ist, werden häufig spezielle kinematische Regionen betrachtet. Im *Niederenergiebereich* um $z = 0$

²Über Quantenkorrekturen entstehen im Prinzip auch Beiträge, die von den Massen virtueller Teilchen abhängen. Diese Effekte sind jedoch vernachlässigbar klein [1, 2].

sind die Polarisationsfunktionen (bei Vernachlässigung der Singulettbeiträge) analytisch:

$$\Pi^\delta(z) = \frac{3}{16\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} C_n^\delta z^n. \quad (1.8)$$

Diese Reihenentwicklung konvergiert im Inneren des durch $|z| \leq 1$ gegebenen Kreises. Die Taylorkoeffizienten C_n^δ lassen sich wieder in eine Störungsreihe mit Koeffizienten $C_n^{(i),\delta}$ entwickeln.

Der euklidische *Hochenergiebereich* entspricht einer Entwicklung für $z \rightarrow -\infty$. Hier treten zusätzlich zu Potenzen von $1/z$ auch Logarithmen auf:

$$\Pi^\delta(z) = \sum_{n,m=0}^{\infty} H_{nm}^\delta \left(\frac{1}{z}\right)^n \log(-4z)^m. \quad (1.9)$$

Bei den Koeffizienten der nichtlogarithmischen Terme, also für $m = 0$, wird dabei der zweite Index üblicherweise nicht ausgeschrieben, d.h. $H_n^\delta \equiv H_{n0}^\delta$. Ebenso wie in der Niederenergieentwicklung werden die Koeffizienten von H_{nm}^δ in der Störungsentwicklung mit $H_{nm}^{(i),\delta}$ bezeichnet.

Eine weitere interessante Region ist der *Schwellenbereich* um $z = 1$. Oberhalb von $z = 1$ wird die Produktion zweier schwerer Quarks möglich und die Polarisationsfunktionen erhalten gemäß dem optischen Theorem einen nichtverschwindenden Imaginärteil, der sich durch Logarithmen der Form $\log(1 - z)$ in der Schwellenentwicklung zeigt. Darüber hinaus treten in höheren Ordnungen der Störungsreihe Pole der Form $1/(\sqrt{1 - z})^j$ mit $j \in \mathbb{N}$ auf. Dies bedeutet, dass die naive Entwicklung in α_s zusammenbricht – für eine konsistente Formulierung der Schwellenentwicklung müssen die Pole zu allen Ordnungen aufsummiert werden (siehe z.B. [3]). Da in dieser Arbeit jedoch nicht die Schwelle selbst, sondern vielmehr der Übergang zur Niederenergie- und zur Hochenergieregion in einer festen Ordnung der Störungstheorie betrachtet werden soll, wird dennoch die naive Schwellenentwicklung verwendet. Damit gilt für die Koeffizienten der Polarisationsfunktionen in der Störungsentwicklung

$$\Pi^{(i),\delta}(z) = \sum_{n=n_i}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} K_{nm}^{(i),\delta} (\sqrt{1 - z})^n \log(1 - z)^m. \quad (1.10)$$

Für den Axialvektorkorrelator und den skalaren Korrelator ist dabei der führende Term in der Schwellenentwicklung durch $n_i = 3 - i$ gegeben. Bei den Korrelatoren des Vektorstroms und des skalaren Stroms treten auf Grund der Coulomb-Singularität höhere Pole auf; hier gilt $n_i = 1 - i$. Wie in der Hochenergieentwicklung wird die Konvention $K_n^{(i),\delta} \equiv K_{n0}^{(i),\delta}$ verwendet.

Analog zu den diagonalen Korrelatoren lassen sich nichtdiagonale Korrelatoren

$$\begin{aligned}\Pi_{\mu\nu,\text{nd}}^v(q^2) &= i \int dx e^{iqx} \langle 0 | T J_\mu^v(x) J_\nu^{v\dagger}(0) | 0 \rangle, \\ \Pi_{\mathbf{1},\text{nd}}^s(q^2) &= i \int dx e^{iqx} \langle 0 | T J^s(x) J^{s\dagger}(0) | 0 \rangle\end{aligned}\quad (1.11)$$

sowie entsprechende Polarisationsfunktionen definieren. Die hier auftretenden Ströme sind

$$J_\mu^v = \bar{\psi} \gamma_\mu \chi, \quad J^s = \bar{\psi} \chi. \quad (1.12)$$

Das Quarkfeld χ wird dabei als masselos betrachtet. Dies führt dazu, dass der Korrelator des nichtdiagonalen Axialvektorstroms mit dem Vektorkorrelator identisch ist, da die zwei γ_5 -Matrizen durch Antikommutieren mit den masselosen Quarkpropagatoren einfach aus der Spur eliminiert werden können; ebenso entspricht der nichtdiagonale pseudoskalare Korrelator dem skalaren.

Die Form der Entwicklungen in den relevanten kinematischen Regionen ist zum größten Teil dieselbe wie für die diagonalen Korrelatoren. Das Verhalten an der ersten Produktionsschwelle ist deutlich weniger singulär [4, 5] und tritt schon bei $q^2 = m_q^2$ auf. Aus diesem Grund wird für die nichtdiagonalen Korrelatoren

$$z = \frac{q^2}{m_q^2} \quad (1.13)$$

definiert. Entsprechend ändert sich die Form der Hochenergieentwicklung gegenüber dem diagonalen Fall geringfügig:

$$\Pi_{\text{nd}}^\delta(z) = \sum_{n,m=0}^{\infty} H_{nm}^\delta \left(\frac{1}{z} \right)^n \log(-z)^m. \quad (1.14)$$

Zusätzlich zu den bislang eingeführten Lorentzstrukturen wird in Kapitel 3 der (diagonale) Tensorstrom

$$j_{\mu\nu}^t = \bar{\chi} \sigma_{\mu\nu} \chi \quad (1.15)$$

mit $\sigma_{\mu\nu} = \frac{1}{2}[\gamma_\mu, \gamma_\nu]$ und dem masselosen Quarkfeld χ betrachtet. Der entsprechende Korrelator lautet

$$\Pi_{\mu\nu\rho\sigma}^t(q^2) = i \int dx e^{iqx} \langle 0 | T j_{\mu\nu}^t(x) j_{\rho\sigma}^t(0) | 0 \rangle. \quad (1.16)$$

Aufgrund der Antisymmetrie unter der Vertauschung von μ mit ν und von ρ mit σ können in der Zerlegung des Tensorkorrelators gemäß seiner Lorentzstruktur nur zwei unabhängige Tensoren T, T' mit

$$\begin{aligned}T_{\mu\nu\rho\sigma} &= g_{\mu\rho} g_{\nu\sigma} - g_{\mu\sigma} g_{\nu\rho}, \\ T'_{\mu\nu\rho\sigma}(q) &= \frac{q_\mu q_\rho}{q^2} g_{\nu\sigma} - \frac{q_\mu q_\sigma}{q^2} g_{\nu\rho} + \frac{q_\nu q_\sigma}{q^2} g_{\mu\rho} - \frac{q_\nu q_\rho}{q^2} g_{\mu\sigma}\end{aligned}\quad (1.17)$$

auftreten. Damit ergeben sich zwei Polarisationsfunktionen $\Pi^t(q^2)$, $\Pi'^t(q^2)$, die durch

$$\Pi_{\mu\nu\rho\sigma}^t(q^2) = q^2 (T_{\mu\nu\rho\sigma} \Pi^t(q^2) + T'_{\mu\nu\rho\sigma}(q^2) \Pi'^t(q^2)), \quad (1.18)$$

definiert werden.

Kapitel 2

Quarkmassenbestimmung aus Stromkorrelatoren

Eine der zentralen phänomenologischen Anwendungen von Stromkorrelatoren ist die Bestimmung von Quarkmassen. Eine bewährte Methode hierfür sind Summenregeln [6, 7], die durch Vergleich genauer störungstheoretischer Rechnungen mit experimentellen Messdaten zu sehr präzisen Werten für Strange-, Charm- und Bottomquarks führen. Zur Berechnung der Strangemasse kann dabei die Hochenergieentwicklung des diagonalen pseudoskalaren Korrelators benutzt werden [8], während in der Bestimmung der Charm- und Bottommassen traditionell Momente aus der Niederenergieentwicklung des diagonalen Vektor-korrelators Verwendung finden. Dank stetiger Verbesserung von Gittersimulationen der QCD existiert hierzu inzwischen jedoch auch eine vielversprechende alternative Bestimmungsmethode: Anstatt experimentelle Daten zu verwenden, können die Massen der Charm- und Bottomquarks auch aus auf dem Gitter berechneten Momenten extrahiert werden. Dies erlaubt eine nahezu unabhängige Überprüfung der aus den experimentellen Daten gewonnenen Quarkmassen. Für den Zugang über Gitterrechnung sind prinzipiell alle Korrelatoren geeignet, was eine starke Motivation für die Berechnung der Niederenergieentwicklung für andere Lorentzstrukturen und nichtdiagonale Korrelatoren darstellt.

In diesem Kapitel werden die grundlegenden Prinzipien der Charm- und Bottommassenbestimmung aus der Niederenergieentwicklung von Stromkorrelatoren kurz erläutert. Darüber hinaus wird im Folgenden auf spezielle Aspekte, die direkt im Rahmen dieser Arbeit betrachtet wurden, näher eingegangen. Eine ausführliche Beschreibung für die Massenbestimmung aus experimentellen Daten findet sich in [1, 9, 10]. Die Extraktion aus Gitterdaten wird in [11, 12] detailliert beschrieben.

2.1 Quarkmassen aus experimentellen Daten

Die Extraktion der Charm- und Bottommassen aus experimentellen Daten beruht auf einer seit langem bekannten Dispersionsrelation, die die Polarisationsfunktion des Vektorkorrelators zum experimentell messbaren R -Verhältnis $R^v(s)$ in Bezug setzt [13]:

$$Q_q^2 \Pi^v(q^2) = \frac{q^2}{12\pi^2} \int_0^\infty ds \frac{R^v(s)}{s(s - q^2)}. \quad (2.1)$$

Dabei ist Q_q die elektrische Ladung des betrachteten Quarks. Das R -Verhältnis ist – bis auf einen Normierungsfaktor – der Wirkungsquerschnitt der Hadronproduktion aus Elektron-Positron-Paaren bei einer Schwerpunktsenergie \sqrt{s} :

$$R^v(s) = \frac{\sigma(e^+e^- \rightarrow \text{Hadronen})}{\sigma_{\text{pt}}}, \quad (2.2)$$

$$\sigma_{\text{pt}} = \sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-)|_{\text{tree}} = \frac{4\pi\alpha^2}{3s}.$$

Dabei werden nur die Beiträge des jeweiligen schweren Quarks (Charm oder Bottom) berücksichtigt.

Die Quarkmasse m_q lässt sich nun aus der Taylorentwicklung von Gl. (2.1) um $q^2 = 0$ durch Koeffizientenvergleich bestimmen:

$$\frac{3Q_q^2}{16\pi^2} \sum_{n=1}^\infty C_n \left(\frac{q^2}{4m_q^2} \right)^n = \sum_{n=1}^\infty (q^2)^n \frac{1}{12\pi^2} \underbrace{\int ds \frac{R(s)}{s^{n+1}}}_{\mathcal{M}_n^{\text{exp}}}, \quad (2.3)$$

$$m_q = \frac{1}{2} \left(\frac{9Q_q^2}{4} \frac{C_n}{\mathcal{M}_n^{\text{exp}}} \right)^{\frac{1}{2n}}. \quad (2.4)$$

Im Prinzip kann die Quarkmasse aus theoretischen Momenten C_n und experimentellen Momenten $\mathcal{M}_n^{\text{exp}}$ mit beliebigen $n \in \mathbb{N}$ bestimmt werden. Wie im nächsten Abschnitt erklärt, sind in Hinsicht auf die experimentellen Daten hohe Momente, d.h. große n günstiger. Unglücklicherweise sind die entsprechenden theoretischen Momente schwer zugänglich; zudem zeigen sich eine zunehmend schlechter werdende Konvergenz der Störungsreihe und stark anwachsende nicht-perturbative Effekte. In der Praxis liefern Werte von n zwischen 1 und 4 die präzisesten Ergebnisse.

2.2 $R(s)$ und experimentelle Momente

Bei der Bestimmung der experimentellen Momente $\mathcal{M}_n^{\text{exp}}$, d.h. bei der gewichteten Integration über $R^v(s)$, lassen sich drei relevante kinematische Bereiche unterscheiden: Die *Resonanzregion* umfasst die gebundenen Zustände J/ψ und ψ'

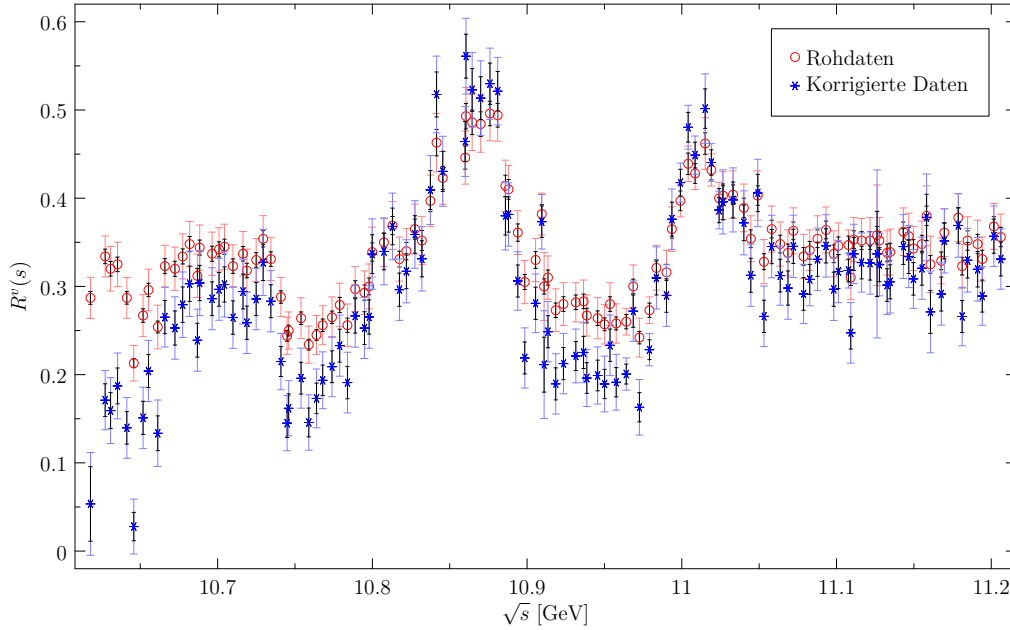


Abbildung 2.1: Von BaBar gemessenes R -Verhältnis in der Schwellenregion der Bottomproduktion. Gezeigt werden die Rohdaten und die aufbereiteten Daten nach Berücksichtigung der Abstrahlung aus dem Anfangszustand und der Korrekturen durch Vakuumpolarisation. Die inneren Fehlerbalken zeigen die systematische Unsicherheit, die äußeren die Summe aus systematischem und statistischem Fehler.

(für Charmquarks) bzw. $\Upsilon(1S) - \Upsilon(4S)$ (für Bottomquarks). Hieran schließt sich die *Schwellenregion* im Bereich von 3,73 GeV bis 4,8 GeV bzw. von 10,62 GeV bis 11,24 GeV an, in der die Produktion von $D\bar{D}$ - bzw. $B\bar{B}$ -Paaren möglich wird. In der *Kontinuumsregion* oberhalb dieser Energien gibt es nur wenige experimentelle Messdaten. Da dort jedoch keine Resonanzen mehr erwartet werden, sollte das R -Verhältnis der theoretischen Vorhersage entsprechen.

Das n -te experimentelle Moment gewichtet gemäß Gl. (2.3) das R -Verhältnis mit einem Faktor $s^{-(n+1)}$, d.h. höhere Momente erhalten größere Beiträge aus der Resonanz- und der Schwellenregion. In diesen Bereichen liegen ausreichend experimentelle Daten vor und das Verhalten von $R^v(s)$ hängt stark von der Quarkmasse des schweren Quarks ab. Aus diesen Gründen sind große Werte von n aus experimenteller Sicht besser zur Quarkmassenbestimmung geeignet.

Im Folgenden wird speziell auf die für die Bestimmung von m_b benötigten Daten im Bereich der Bottomschwelle eingegangen. Gegenüber der älteren Analyse in [1] wurden dabei im Rahmen dieser Arbeit aktuelle Rohdaten des BaBar-Experiments [14] (siehe Abbildung 2.1) aufbereitet. Eine kurze Zusammenfassung der wichtigsten Aspekte der hier beschriebenen Vorgehensweise findet sich in [10].

Eine direkte Verwendung der BaBar-Daten würde aus zwei Gründen zu inkor-

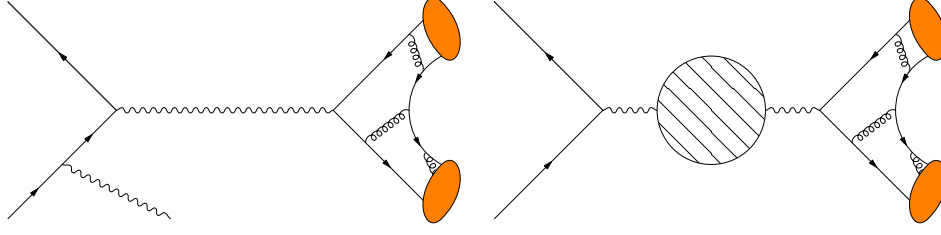


Abbildung 2.2: Zu berücksichtigende QED-Effekte in den Messdaten von BaBar. Links: Abstrahlung niederenergetischer, unmessbarer Photonen aus dem Anfangszustand. Rechts: Modifikation der Photonpropagation durch Vakuumpolarisation.

rekten Ergebnissen führen: Zum Einen kann die Abstrahlung von Photonen vom ursprünglichen Elektron-Positron-Paar dazu führen, dass für die anschließende Hadronproduktion weniger Schwerpunktsenergie zur Verfügung steht. Wenn diese Photonen zu niederenergetisch sind oder kolinear abgestrahlt werden, können sie zum Teil nicht mehr vom Detektor aufgelöst werden. In einem solchen Fall ist dieser Prozess nicht mehr von der reinen Hadronproduktion zu unterscheiden. Dieser Effekt wurde in der BaBar-Analyse nur teilweise berücksichtigt. Zum Anderen ist in der theoretischen Rechnung der Einfluss der Vakuumpolarisation des virtuellen Photons aus der Elektron-Positron-Annihilation nicht enthalten und muss aus diesem Grund auch aus den Messdaten eliminiert werden. Selbstverständlich existieren in noch höherer Ordnung weitere QED-Effekte; diese sind jedoch vernachlässigbar klein.

Die Emission niederenergetischer Photonen kann durch die Abstrahlfunktion $g(s, z)$ beschrieben werden, die die Wahrscheinlichkeitsdichte angibt, bei einer *ursprünglichen Schwerpunktsenergie* \sqrt{s} noch die *effektive Schwerpunktsenergie* \sqrt{zs} für den eigentlichen Produktionsprozess zur Verfügung zu haben. Damit gilt

$$\hat{\sigma}(s) = \int_0^1 dz g(s, z) \sigma(sz), \quad (2.5)$$

wobei σ der gewünschte Wirkungsquerschnitt ohne Abstrahlung aus dem Anfangszustand ist, während $\hat{\sigma}$ dem gemessenen Wirkungsquerschnitt mit Abstrahlung entspricht.

Die in [15] durchgeführte Aufsummierung der emittierten Photonen führt zu folgendem Ergebnis für die Abstrahlfunktion $g(s, z)$ [16]:

$$g(s, z) = \beta(1 - z)^{\beta-1} e^{\delta_{\text{yfs}}} F \left(\delta_C^{V+S} + \delta_C^H \right), \quad (2.6)$$

	$\Upsilon(1S)$	$\Upsilon(2S)$	$\Upsilon(3S)$	$\Upsilon(4S)$
M [GeV]	9,46030(26)	10,02326(31)	10,3552(5)	10,5794(12)
Γ_{ee} [keV]	1,340(18)	0,612(11)	0,443(8)	0,272(29)

Tabelle 2.1: Elektronische Zerfallsbreiten und Massen der Υ -Resonanzen [17]. Die ebenfalls benötigte totale Breite der $\Upsilon(4S)$ -Resonanz beträgt $\Gamma(\Upsilon(4S)) = (20,5 \pm 2,5) \text{ MeV}$

mit

$$\begin{aligned}
 \beta &= \frac{2\alpha}{\pi}(L-1), \\
 L &= \ln \frac{s}{m_e^2}, \\
 F &= \frac{e^{-\beta\gamma_E}}{\Gamma(1+\beta)}, \\
 \delta_{\text{yfs}} &= \frac{\alpha}{\pi} \left(\frac{L}{2} - 1 + 2\zeta(2) \right), \\
 \delta_c^{V+S} &= 1 + \frac{\alpha}{\pi}(L-1) + \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha}{\pi} \right)^2 L^2, \\
 \delta_C^H &= -\frac{1-z^2}{2} + \frac{\alpha}{\pi} L \left[-\frac{1}{4} (1+3z^2) \ln z - 1 + z \right]. \tag{2.7}
 \end{aligned}$$

Zunächst sollen die Effekte der Resonanzen $\Upsilon(1S) - \Upsilon(4S)$ berücksichtigt werden. Hier sind die tatsächlichen Wirkungsquerschnitte wohlbekannt, sodass die Abstrahlungseffekte direkt berechnet und vom gemessenen Wirkungsquerschnitt $\hat{\sigma}$ subtrahiert werden können. Die Wirkungsquerschnitte zur Produktion der schmalen Resonanzen können dabei in guter Näherung durch

$$\sigma_{\Upsilon(1S)} = 12\pi^2 \frac{\Gamma_{ee}(\Upsilon(1S))}{M_{\Upsilon(1S)}} \delta(s - M_{\Upsilon(1S)}^2) \tag{2.8}$$

und analoge Formeln für $\sigma_{\Upsilon(2S)}$ und $\sigma_{\Upsilon(3S)}$ beschrieben werden. Dies entspricht dem Grenzfall einer Breit-Wigner-Kurve für eine verschwindend kleine Zerfallsbreite. Die breitere $\sigma_{\Upsilon(4S)}$ -Resonanz wird dagegen durch eine relativistische Breit-Wigner-Kurve parametrisiert:

$$\sigma_{\Upsilon(4S)} = 12\pi \frac{\Gamma_{ee}(\Upsilon(4S))\Gamma(\Upsilon(4S))}{(s - M_{\Upsilon(4S)}^2)^2 + \Gamma(\Upsilon(4S))^2 M_{\Upsilon(4S)}^2}. \tag{2.9}$$

Die in Tabelle 2.1 aufgeführten elektronischen Breiten Γ_{ee} und Massen sowie die totale Zerfallsbreite $\Gamma(\Upsilon(4S)) = (20,5 \pm 2,5) \text{ MeV}$ sind dabei [17] entnommen.

Für den Wirkungsquerschnitt nach Abzug der Resonanzen ergibt sich damit nach Gl. (2.5)

$$\hat{\sigma}_{\text{thr}}(s) = \hat{\sigma}(s) - \sum_{\Upsilon=\Upsilon(1S)}^{\Upsilon(4S)} \int_0^1 dz g(s, z) \sigma_{\Upsilon}(sz), \quad (2.10)$$

wobei die Berechnung der Integrale über die ersten drei Resonanzen dank der δ -Distribution trivial ist; das letzte Integral über die 4S-Resonanz kann numerisch berechnet werden.¹ Für den subtrahierten Wirkungsquerschnitt $\hat{\sigma}_{\text{thr}}(s)$ gilt dann

$$\hat{\sigma}_{\text{thr}}(s) = \int_{z_0}^1 dz g(s, z) \sigma(s z). \quad (2.11)$$

Die untere Integrationsgrenze $z_0 = (10,62 \text{ GeV})^2/s$ ist dabei durch den Beginn der Schwellenregion gegeben.

Um diese Gleichung nach $\sigma(s)$ aufzulösen, wird angenommen, dass die Korrekturen durch Abstrahlung klein sind, also $\sigma(s) \approx \hat{\sigma}_{\text{thr}}(s)$ oder genauer

$$g(s, z) = \delta(1 - z) + \delta g(s, z), \quad (2.12)$$

wobei $\delta g(s, z)$ eine „kleine“ Abweichung von der δ -Distribution ist. Diese Zerlegung von $g(s, z)$ erscheint plausibel: Einerseits handelt es sich bei der Abstrahlung um einen QED-Effekt. Naiv werden also auf Grund der Schwäche der elektromagnetischen Wechselwirkung nur geringe Korrekturen erwartet. Andererseits zeigt auch die graphische Darstellung von $g(s, z)$ in Abbildung 2.3 einen starken Anstieg hin zu einem Pol bei $z = 1$.

Die Entwicklung von Gl. (2.11) in eine Störungsreihe in $\delta g(s, z)$ liefert folgende rekursive Lösung:

$$\sigma_0(s) = \hat{\sigma}_{\text{thr}}(s), \quad (2.13)$$

$$\sigma_i(s) = \sigma_0 - \int_{z_0}^1 dz \delta g(s, z) \sigma_{i-1}(sz). \quad (2.14)$$

Wenn die Näherung für $g(s, z)$ korrekt ist, wird erwartet, dass σ_i für wachsende i den tatsächlichen Wirkungsquerschnitt σ zunehmend besser beschreibt. Dies lässt sich durch Einsetzen von σ_i in Gl. (2.11) überprüfen:

$$\hat{\sigma}_i(s) = \int_{z_0}^1 dz g(s, z) \sigma_i(s z). \quad (2.15)$$

Konvergiert $\hat{\sigma}_i$ gegen $\hat{\sigma}_{\text{thr}}$, so ist zu erwarten, dass dies ebenfalls für σ_i und σ gilt. Wie in Abbildung 2.4 zu sehen, wird die Abweichung für die meisten

¹Die Subtraktion der $\Upsilon(1S)$ -, $\Upsilon(2S)$ - und $\Upsilon(3S)$ -Resonanzen wurde auch bereits von der BaBar-Kollaboration durchgeführt. Mit der hier gezeigten Methode ergeben sich im Wesentlichen die gleichen Resultate für diese drei Resonanzen.

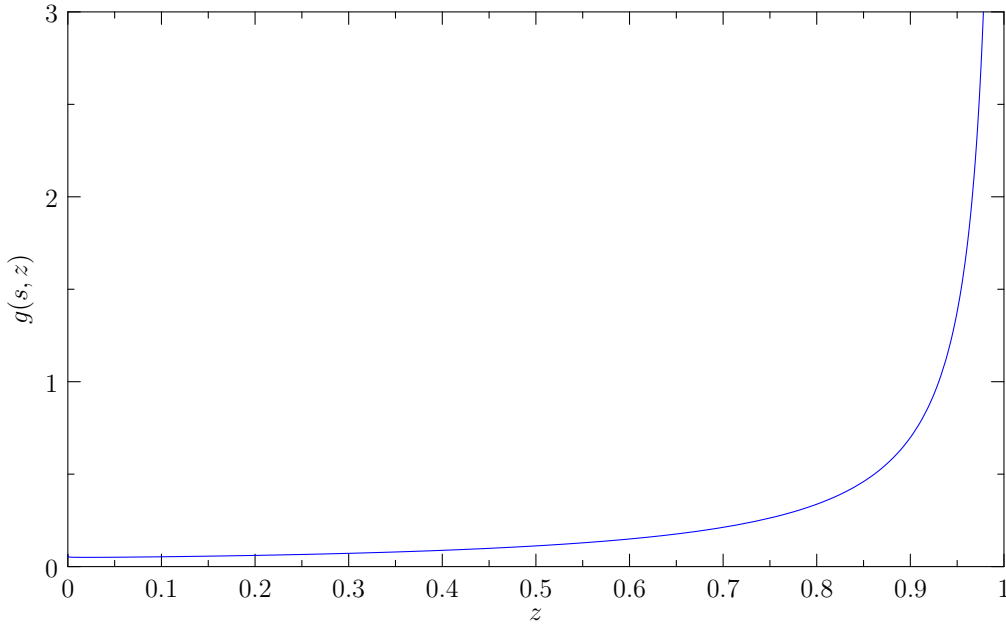


Abbildung 2.3: Die Abstrahlfunktion $g(s, z)$ für $s = (11 \text{ GeV})^2$. Die Näherung durch eine δ -Distribution erscheint gerechtfertigt, sofern der betrachtete Bereich um $z = 1$ nicht allzu klein wird.

Datenpunkte schon mit wenigen Iterationen deutlich geringer. Dagegen nimmt die Abweichung für die ersten paar Datenpunkte nur sehr langsam ab; Grund hierfür ist, dass der Integrationsbereich in z verhältnismäßig klein ist und die Abstrahlfunktion $g(s, z)$ nicht mehr ausreichend gut durch eine kleine Abweichung von $\delta(1 - z)$ beschrieben werden kann. Für die Auswertung wurden 5 Iterationen durchgeführt, d.h. es wurde $\sigma \approx \sigma_5$ angenommen. Der Fehler dieser Näherung liegt nach Abbildung 2.4 voraussichtlich für fast alle Datenpunkte bei unter 0,5%.

Um die systematischen Unsicherheiten auf die korrigierten Daten übertragen zu können, wurden vor der Korrektur die von BaBar angegebenen korrelierten systematischen Fehler einmal von den gemessenen Werten subtrahiert und einmal addiert. Der sich ergebende Unterschied nach der Korrektur wird als korrelierter Fehler der Enddaten interpretiert. Hierzu wird der vom Experiment angegebene unkorrelierte systematische Fehler quadratisch addiert. In Abbildung 2.1 werden der gesamte systematische Fehler sowie der statistische Fehler gezeigt. Bei der Extraktion der Quarkmassen wurde außerdem ein zusätzlicher Fehler von 2% durch die Unsicherheiten bei der Aufbereitung der Rohdaten angenommen [10].

Schließlich muss noch der zweite QED-Effekt, die Modifikation des Photonpropagators durch Vakuumpolarisation (siehe Abbildung 2.2), berücksichtigt werden. Dazu wird der Normierungsfaktor σ_{pt} in der Definition von $R^v(s)$ (Gl. (2.2)) so

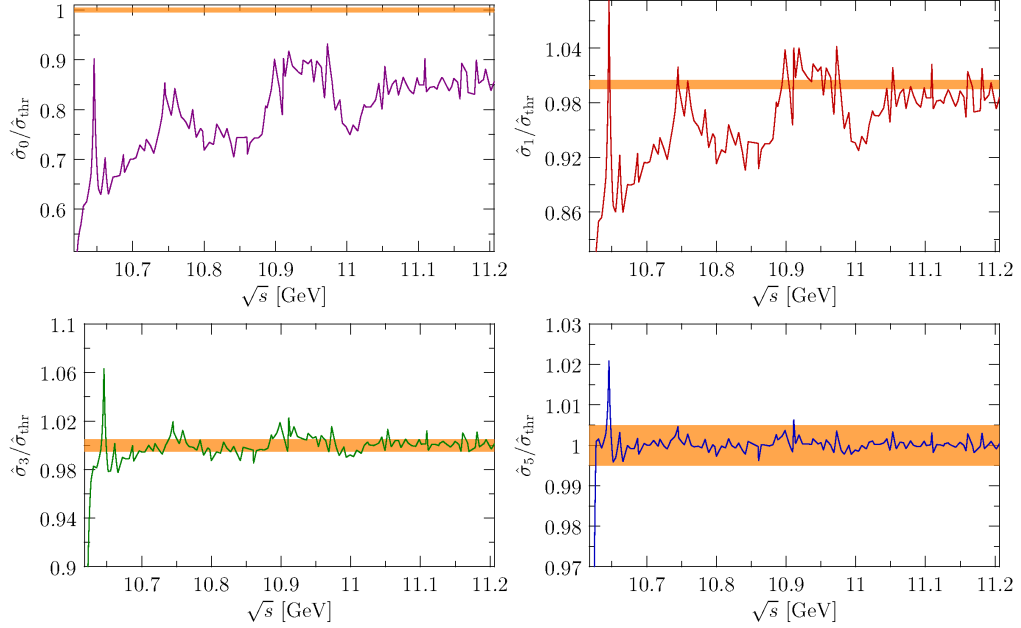


Abbildung 2.4: Relative Abweichung von $\hat{\sigma}_i$ gegenüber $\hat{\sigma}_{\text{thr}}$ nach 0, 1, 3 und 5 Iterationen. Zwischen den Datenpunkten wurde der Wirkungsquerschnitt linear interpoliert. Das Band zeigt einen Fehler von 0,5% an.

modifiziert, dass er ebenso wie die BaBar-Daten die Korrekturen durch Vakuumpolarisation enthält. Bildet man anschließend das Verhältnis aus gemessenem Wirkungsquerschnitt und modifiziertem Normierungsfaktor, so kürzt sich der Effekt heraus.

Dank der Ward-Identitäten ist es möglich, die Vakuumpolarisation in die elektromagnetische Kopplung zu absorbieren. Die Feinstrukturkonstante α wird über eine verschwindende Vakuumpolarisation bei $\sqrt{s} = 0$ definiert. Diese Renormierungsbedingung lässt sich offensichtlich ebenso für beliebige Energien $\sqrt{s} \neq 0$ formulieren: Die Forderung $\Pi^v(s) = 0$ definiert eine „laufende On-shell Kopplungskonstante“ $\alpha(s)$. Um nun die Vakuumpolarisation im Normierungsfaktor σ_{pt} zu berücksichtigen, kann dort einfach α durch $\alpha(s)$ ersetzt werden (siehe Abbildung 2.5). Da $\alpha(s)$ nur schwach von s abhängt, kann im hier betrachteten Schwellenbereich ein konstanter Wert von

$$(\alpha(s))^2 \approx \frac{\alpha^2}{0,93} \quad (2.16)$$

angenommen werden. Nach Division des Wirkungsquerschnitts durch den modifizierten Normierungsfaktor ergibt sich das in Abbildung 2.1 gezeigte finale R -Verhältnis.

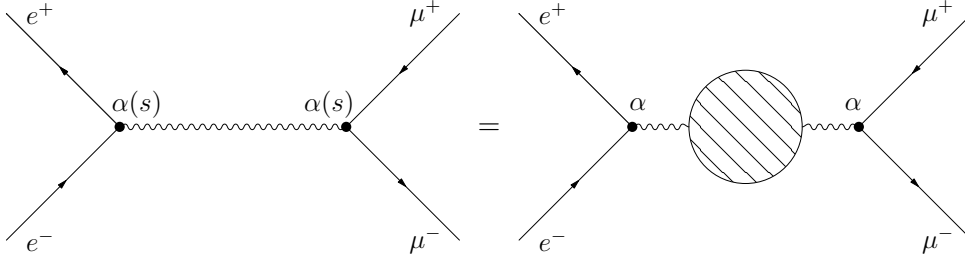


Abbildung 2.5: Modifizierter Normierungsfaktor einschließlich Vakuumpolarisation.

2.3 Theoretische Momente

Die Berechnung der zur Bestimmung der Quarkmassen benötigten theoretischen Momente ist zwar konzeptionell eher einfach, aber dennoch sehr aufwändig. Grund hierfür ist die angestrebte hohe Präzision: Um die Genauigkeit der experimentellen Daten zu erreichen, ist es nötig Quantenkorrekturen bis zum Vierschleifenniveau zu berücksichtigen. Diese Rechnung ist nur dadurch möglich, dass nach der Taylorentwicklung der Korrelatoren lediglich eine Energieskala, nämlich die Masse des jeweiligen schweren Quarks, verbleibt.

Im Folgenden werden die Methoden zur Berechnung der relevanten Vakuumdiagramme zusammengefasst. Ein besonderes Augenmerk liegt dabei auf der Abschätzung höherer Momente durch ein auf Padé-Approximationen basierendes Näherungsverfahren [18–22]. Weitere mögliche Anwendungen der hier diskutierten Ergebnisse werden kurz aufgeführt.

2.3.1 Momente diagonalen Korrelatoren

Die traditionelle Bestimmungsmethode von Quarkmassen aus dem totalen Wirkungsquerschnitt für $e^+e^- \rightarrow \text{Hadronen}$ beruht auf den Momenten des diagonalen Vektorkorrelators. Aus diesem Grund liegt auch der Schwerpunkt der theoretischen Untersuchungen auf diagonalen Korrelatoren.

Bis zur Zweischleifenordnung sind die Korrelatoren vollständig analytisch bekannt [23]. Auf Dreischleifenordnung ist es möglich, nahezu beliebig viele Momente zu berechnen; 30 Momente sind explizit in der Literatur verfügbar [22, 24–28]. Die benötigten Vierschleifenkorrekturen sind für die drei führenden physikalischen Momente exakt bekannt [29–33]. Zusätzlich kann mit Hilfe einer Ward-Identität das vierte Moment der pseudoskalaren Polarisationsfunktion aus dem dritten Moment der longitudinalen Polarisationsfunktion für Axialvektorströme

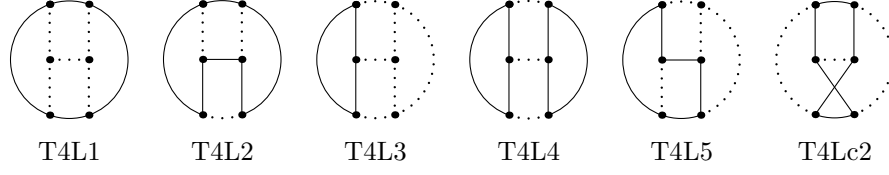


Abbildung 2.6: Liste der Topologien, die bei der Berechnung der theoretischen Momente auftreten.

gewonnen werden:

$$\begin{aligned}
 q^2 \Pi_L^a(q^2) &= 4m_q^2 \left(\Pi^p(q^2) - q^2 \left[\frac{\partial \Pi^p(q^2)}{\partial q^2} \right]_{q^2=0} \right) \\
 \Rightarrow C_n^a &= C_{n+1}^p \quad \text{für } n \in \mathbb{N}.
 \end{aligned} \tag{2.17}$$

Für noch höhere Momente existieren recht genaue Abschätzungen [34–36].

Im folgenden Abschnitt wird die in [32, 33] zur exakten Berechnung der Vierschleifenmomente verwendete Methode kurz zusammengefasst. Anschließend wird das in [35] verwendete Näherungsverfahren zur Abschätzung der Vierschleifenbeiträge zu höheren Momenten diskutiert.

Vierschleifenmomente

Die zur Vakuumpolarisation beitragenden Diagramme können mit dem Programm QGRAF [37] erzeugt werden. Nach der Projektion der Korrelatoren auf die Polarisationsfunktionen (siehe Abschnitt 1.2), der Spurbildung über die geschlossenen Fermionlinien und der Taylorentwicklung im kleinen äußeren Impuls q müssen skalare Vakuumdiagramme mit bis zu vier Schleifen berechnet werden. Die zugehörigen Integrale haben die Form

$$\int [dk_1] \cdots \int [dk_l] \frac{1}{D_1^{a_1} \cdots D_j^{a_j}} \tag{2.18}$$

mit l Schleifen und $j = l(l+1)/2$ kinematischen Invarianten. Das Integralmaß ist definiert über

$$[dk_n] = \frac{d^d k_n}{i\pi^{\frac{d}{2}}} \frac{1}{\Gamma(1+\epsilon)}. \tag{2.19}$$

Die Propagatoren im Nenner von Gl. (2.18) haben die Form $D_n = m_n^2 - p_n^2$, wobei p_n eine durch Impulserhaltung an den Vertices festgelegte Linearkombination der Schleifenimpulse ist; m_n ist entweder 0 oder die Masse des schweren Quarks.

Auf Vierschleifenniveau ist zu beachten, dass nur neun der zehn auftretenden Invarianten tatsächlich einer Linie in der graphischen Darstellung der Diagramme entsprechen. Davon unabhängig werden im Weiteren die Invarianten auch

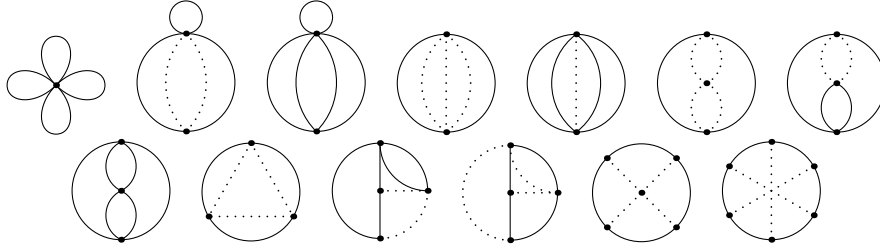


Abbildung 2.7: Bei der Berechnung der Vierschleifenmomente auftretende Masterintegrale.

als Propagatoren bezeichnet. Wenn Propagatoren D_n mit einer Potenz $a_n > 1$ auftreten, so wird $a_n - 1$ als Zahl der „dots“ auf diesem Propagator bezeichnet. Diagramme, die den gleichen Satz an Propagatoren haben und sich somit nur in der Anzahl an dots unterscheiden, werden als zur selben Topologie zugehörig bezeichnet. Die für die Vierschleifenmomente relevanten Topologien sind in Abbildung 2.6 aufgeführt. Für die Zuordnung der Diagramme zu einer Topologie können die Programme **q2e** und **exp** [38, 39] verwendet werden.

Die eigentliche Schwierigkeit besteht nun in der Berechnung dieser skalaren Diagramme. Bei der Bestimmung des dritten Moments auf Vierschleifenniveau treten ungefähr 4 000 000 solcher Integrale auf, die bis zu zwölf dots aufweisen. Mit jedem höheren Moment kämen durch die Entwicklung im Impuls zwei zusätzliche dots hinzu, wodurch die Rechnung noch aufwändiger würde – aus diesem Grund konnten bislang nur die führenden drei Momente exakt bestimmt werden.

Für die Berechnung der Integrale werden diese auf eine kleine Anzahl von Masterintegralen reduziert. Die für die Momente der Stromkorrelatoren benötigten Masterintegrale (siehe Abbildung 2.7) sind alle analytisch bekannt [40–48]. Grundlage der Reduktion sind lineare Beziehungen – so genannte IBP-Relationen (*integration-by-parts*-Relationen) – zwischen skalaren Integralen mit verschiedenen Potenzen a_1, \dots, a_j , die sich aus partieller Integration ergeben [49]. Offensichtlich gilt

$$\int [dk_1] \cdots \int [dk_l] \frac{\partial}{\partial k_n} k_m \frac{1}{D_1^{a_1} \cdots D_j^{a_j}} = 0. \quad (2.20)$$

Durch explizites Ausführen der Ableitung im Integranden dieser Gleichung ergeben sich l^2 Relationen zwischen verschiedenen Integralen.

Es gibt unterschiedliche Ansätze um aus IBP-Identitäten eine Reduktion von allgemeinen skalaren Integralen auf Masterintegrale zu erhalten, also eine große Anzahl komplizierter Integrale durch einige wenige einfache auszudrücken. Selbstverständlich ist es dafür essentiell festzulegen, wann ein Integral überhaupt „einfach“ ist; d.h. es muss eine Ordnung definiert werden, die die Integrale gemäß ihrer Komplexität vergleicht. Ein naheliegendes Kriterium ist die Anzahl der un-

verschiedlichen Propagatoren mit nichtverschwindender Potenz: Ein Diagramm, das mehr Propagatoren enthält, ist offensichtlich komplizierter. Haben zwei Diagramme die gleiche Anzahl von verschiedenen Propagatoren, so ist dasjenige mit weniger dots üblicherweise einfacher. Weiterführende Kriterien – etwa auf welchen Propagatorlinien dots bevorzugt liegen sollten – sind weniger offensichtlich, können aber die Effizienz der Reduktionsalgorithmen merklich beeinflussen. Dies ist insbesondere für den weiter unten beschriebenen Zugang über Gröbner-Basen relevant.

Die konzeptionell einfachste Reduktionsmethode ist der Zugang von Laporta [50]. Hierbei werden die IBP-Relationen für ausgewählte feste Werte der Indizes a_1, \dots, a_j aufgestellt. Dies ergibt für jede Topologie ein lineares Gleichungssystem (LGS), welches direkt durch Gauß-Elimination gelöst werden kann. Da es weniger linear unabhängige Gleichungen als Unbekannte gibt, wird nicht für jedes Integral eine Lösung gefunden. Bei Wahl einer geeigneten Ordnung sind diese verbleibenden Integrale gerade die Masterintegrale der betrachteten Topologie. Bemerkenswerterweise ist die Zahl der Masterintegrale beschränkt und ab einer bestimmten Größe des LGS treten keine neuen Masterintegrale mehr auf. Diese zunächst empirisch festgestellte Tatsache wurde mittlerweile bewiesen [51].

Der Nachteil dieser Reduktionsmethode besteht darin, dass das zu lösende LGS in mehrfacher Hinsicht viel zu groß ist: Die Reduktion wird auch für viele Integrale berechnet, die im eigentlichen Problem überhaupt nicht auftreten. Zudem sind nur etwa zwischen einem Fünftel und einem Drittel der Gleichungen im LGS linear unabhängig. Eine naive Implementierung des Laporta-Algorithmus führt bei der Berechnung der Vierschleifenmomente zu Gleichungssystemen, die auf Grund ihrer Größe nicht mehr gelöst werden können.²

Trotz dieser Probleme konnte die Reduktion mit dieser Methode erfolgreich durchgeführt werden. Dazu wurde bei der Erzeugung der IBP-Relationen berücksichtigt, dass zusätzliche dots durch die Ableitung nach dem äußeren Impuls nur auf denjenigen Linien entstehen, durch die dieser Impuls auch tatsächlich fließt. Dies führt zu wesentlich kleineren Gleichungssystemen als der naive Ansatz. Die Reduktion geschieht dann mit einer hochoptimierten Implementierung der Gauß-Elimination, wie dem C++-Programm **TCrusher** [52]. **TCrusher** verwendet **Fermat** [53] für die Division von Polynomen und die Bibliothek **GiNaC** [54] für sonstige algebraische Manipulationen. Auf Mehrkernsystemen kann die Reduktion durch Parallelisierung mit mehreren Threads signifikant beschleunigt werden.

Das oben beschriebene Reduktionsverfahren skaliert sehr schlecht mit der Anzahl der dots, da die Zahl der Gleichungen exponentiell zunimmt. Aus diesem Grund erscheint eine spezielle Behandlung der Diagrammklassen mit den meisten dots

²Der Aufwand zur Lösung eines LGS mit dem Gaußalgorithmus beträgt bei n Gleichungen $\mathcal{O}(n^3)$. Hierbei ist noch nicht berücksichtigt, dass bei größeren Systemen die auftretenden Koeffizienten im Allgemeinen komplizierter werden.

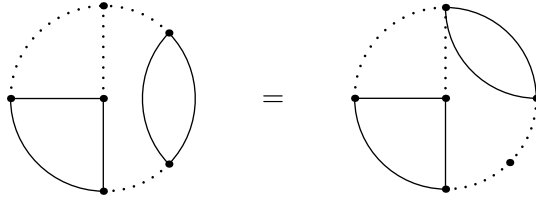


Abbildung 2.8: Diagramm mit zwei Selbstenergieeinsetzungen. Sämtliche Topologien für diesen Diagrammtyp ergeben sich aus dem hier gezeigten Diagramm durch eine veränderte Massenbelegung der Propagatoren.

vielversprechend. Wie in Abbildung 2.8 zu sehen, weisen Diagramme mit mehr als einer Selbstenergieeinsetzung inhärent mehr dots auf. Auf Vierschleifenniveau sind bis zu drei solcher Einsetzungen möglich, was zu zwei zusätzlichen dots führt; alle für die Berechnung der dritten Momente benötigten Diagramme mit elf oder zwölf dots enthalten also mehrere Selbstenergien.

Ein Ansatz zur Behandlung dieser speziellen Diagrammklasse basiert auf der separaten Reduktion von Diagrammen mit Selbstenergieeinsetzungen auf Masterintegrale [33, 55]. Da die Selbstenergien maximal zwei Schleifen aufweisen, ist diese Reduktion sehr viel einfacher als die des kompletten Vakuumdiagramms. Die Reduktionskoeffizienten hängen vom externen Impuls p der jeweiligen Selbstenergie ab und können auf zusätzliche Propagatoren der Form $D = (nm)^2 - p^2$ mit ganzzahligen n zurückgeführt werden. Für die weitere Reduktion werden spezielle IBP-Identitäten benötigt, da Ableitungen bezüglich p erneut zu zusätzlichen dots für die Selbstenergieeinsetzung führen, welche daraufhin wiederum auf Masterintegrale reduziert wird. Mit diesen IBP-Relationen können die gesamten Vakuumdiagramme anschließend über den üblichen Laporta-Zugang reduziert werden.

Bei anderen Ansätzen zur Lösung des Reduktionsproblems wird versucht, für jede Topologie spezielle geeignete Kombinationen der IBP-Relationen zu finden. Beispiele hierfür sind die den FORM-Programmen [56] MINCER [57] und MATAD [58] implementierten Reduktionsalgorithmen für masselose Propagatoren bzw. massive Vakuumdiagramme mit bis zu drei Schleifen. Hier wurden manuell Kombinationen der IBP-Identitäten gefunden, die komplizierte Diagramme sukzessiv durch einfachere ersetzen. Leider ist auf Vierschleifenniveau kein solcher Satz an Relationen bekannt, mit dem beliebige Integrale systematisch in einfachere überführt werden können.

Ein Zugang für die automatische Bestimmung von „guten“ Kombinationen von IBP-Relationen beruht auf Gröbner-Basen. Dazu wird ein Polynomring in geeignet definierten Operatoren betrachtet. Die IBP-Identitäten entsprechen bestimmten Polynomen in diesem Ring; sie erzeugen ein Rechtsideal³. Skalare In-

³Ein Rechtsideal \mathcal{I} in einem Ring $\mathcal{R}(+, \cdot)$ ist eine Untergruppe $\mathcal{I}(+, \cdot)$, die unter Multiplikation

Integrale lassen sich als Monome in den Operatoren darstellen. Das Problem der Reduktion eines Integrals (bzw. Monoms) m lässt sich dann folgendermaßen formulieren: Finde ein Element i des Ideals, sodass der Rest $r = m - i$ möglichst einfach wird. Da i eine Kombination von IBP-Relationen ist und somit als Integral verschwindet, ist r dann die Darstellung von m als Linearkombination der Masterintegrale. Es wäre naheliegend, r als Rest nach Division von m durch sämtliche Basiselemente des Ideals zu interpretieren. Leider hängt dieser Rest im hier vorliegenden Fall von multivariaten Polynomen sowohl von der gewählten Basis als auch von der Reihenfolge ab, in der durch die Basiselemente geteilt wird.

Dieses Problem wird durch die Verwendung von Gröbner-Basen gelöst: Für diese speziellen Basen ist das Ergebnis der Division eindeutig. Eine Gröbner-Basis lässt sich im Prinzip mit Hilfe des Buchberger-Algorithmus [59] aus einer beliebigen anderen Basis konstruieren. Unglücklicherweise skaliert dieses Verfahren zu schlecht für die Anwendung in praktisch relevanten Reduktionsproblemen. Eine sinnvolle Alternative zu Gröbner-Basen sind so genannte *S-Basen* [60, 61], die als Ergebnis der Reduktion außer Masterintegralen zusätzlich Integrale aus Subtopologien zulassen. Für die Konstruktion der S-Basen existiert ein nicht-deterministischer, aber in vielen Fällen recht effizienter Algorithmus, der im `Mathematica`-Programm `FIRE` [62] implementiert ist. Wie bereits angedeutet hängt der Erfolg des S-Basis-Algorithmus stark von der gewählten Ordnung der Integrale ab. In einigen Fällen müssen vor einem erfolgreichen Einsatz mehrere verschiedene, heuristisch gewählte Ordnungen getestet werden.

Für spezielle Diagrammtypen stellen die auf Gröbner-Basen oder der gesonderten Behandlung von Selbstenergieeinsetzungen beruhenden Verfahren effiziente Alternativen zur traditionellen Laporta-Reduktion dar. Dennoch konnten sämtliche für die Berechnung der führenden drei Vierschleifenmomente benötigten Integrale mit der Laporta-Methode auf die bekannten Masterintegrale zurückgeführt werden. Teile der Reduktion wurden davon unabhängig mit den anderen hier zusammengefassten Verfahren überprüft.

Die exakten Ergebnisse finden sich in Anhang A.1. Numerisch ergibt sich für die in Gl. (1.8) definierten Momente im $\overline{\text{MS}}$ -Schema mit $n_h = 1$ schwerem Quark

mit beliebigen Elementen des Rings von rechts abgeschlossen ist: $\mathcal{IR} = \mathcal{I}$.

und n_l leichten Quarks

$$\begin{aligned}
 \bar{C}_1^{(3),v} &= 1,06666 + 2,55473 a_s + (0,50988 + 0,66227 n_l) a_s^2 \\
 &\quad + (1,87882 - 2,79472 n_l + 0,09610 n_l^2) a_s^3, \\
 \bar{C}_2^{(3),v} &= 0,45714 + 1,10955 a_s + (1,41227 + 0,45491 n_l) a_s^2 \\
 &\quad + (-6,23488 + 0,96156 n_l - 0,01594 n_l^2) a_s^3, \\
 \bar{C}_3^{(3),v} &= 0,27089 + 0,51939 a_s + (0,35222 + 0,42886 n_l) a_s^2 \\
 &\quad + (-8,30971 + 1,94219 n_l - 0,03959 n_l^2) a_s^3, \tag{2.21}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \bar{C}_1^{(3),a} &= 0,53333 + 0,84609 a_s + (-2,34665 + 0,41316 n_l) a_s^2 \\
 &\quad + (-1,16280 - 0,56583 n_l + 0,04784 n_l^2) a_s^3, \\
 \bar{C}_2^{(3),a} &= 0,15238 + 0,14165 a_s + (-0,83002 + 0,19218 n_l) a_s^2 \\
 &\quad + (-6,95414 + 1,11092 n_l - 0,02049 n_l^2) a_s^3, \\
 \bar{C}_3^{(3),a} &= 0,06772 - 0,01276 a_s + (-0,67592 + 0,13562 n_l) a_s^2 \\
 &\quad + (-5,36382 + 0,98605 n_l - 0,02233 n_l^2) a_s^3, \tag{2.22}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 C_1^{(3),s} &= 0,8 + 0,60246 a_s + (-9,50321 + 0,58765 n_l) a_s^2 \\
 &\quad + (2,36044 - 3,31076 n_l + 0,23981 n_l^2) a_s^3, \\
 \bar{C}_2^{(3),s} &= 0,22857 + 0,42582 a_s + (-1,44346 + 0,23664 n_l) a_s^2 \\
 &\quad + (-16,84601 + 1,28345 n_l + 0,00398 n_l^2) a_s^3, \\
 \bar{C}_3^{(3),s} &= 0,10158 + 0,15355 a_s + (-0,60909 + 0,15633 n_l) a_s^2 \\
 &\quad + (-10,40154 + 1,32090 n_l - 0,01802 n_l^2) a_s^3, \tag{2.23}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 C_1^{(3),p} &= 1,33333 + 3,11111 a_s + (-1,73650 + 0,61728 n_l) a_s^2 \\
 &\quad + (21,34792 - 8,66336 n_l + 0,37997 n_l^2) a_s^3, \\
 \bar{C}_2^{(3),p} &= 0,53333 + 2,06419 a_s + (6,36704 + 0,28971 n_l) a_s^2 \\
 &\quad + (10,92473 - 1,49687 n_l + 0,07020 n_l^2) a_s^3, \\
 \bar{C}_3^{(3),p} &= 0,30476 + 1,21171 a_s + (5,19573 + 0,26782 n_l) a_s^2 \\
 &\quad + (13,96839 + 0,15741 n_l + 0,01535 n_l^2) a_s^3, \\
 \bar{C}_4^{(3),p} &= 0,20317 + 0,71275 a_s + (3,40816 + 0,28627 n_l) a_s^2 \\
 &\quad + (10,20740 + 1,06763 n_l - 0,00916 n_l^2) a_s^3. \tag{2.24}
 \end{aligned}$$

Padé-Approximation

Wie bereits diskutiert, lässt sich über die direkte Berechnung von Vakuumdiagrammen nur eine begrenzte Zahl von Momenten bestimmen. Eine Möglichkeit höhere Momente zumindest näherungsweise abzuschätzen, besteht darin, die gesamte Vierschleifenkorrektur zu den Polarisationsfunktionen für beliebige Impulse q möglichst genau aus den vorhandenen Informationen zu rekonstruieren. Die rekonstruierte Funktion kann dann um $q^2 = 0$ entwickelt werden, um eine Abschätzung für die gesuchten Momente zu erhalten. Für eine möglichst genaue Approximation sollten für die Konstruktion der Näherungsfunktion sämtliche zur Verfügung stehende Informationen über das Niederenergie-, Schwellen- und Hochenergieverhalten der Polarisationsfunktionen ausgenutzt werden.

Der Nutzen der rekonstruierten Polarisationsfunktionen ist nicht auf die Abschätzung höherer Niederenergiemomente beschränkt. Zum Einen lassen sich natürlich auch weitere Entwicklungskoeffizienten in beliebigen anderen Regionen abschätzen. Zum Anderen können aber auch die Vierschleifenkorrekturen zum jeweiligen R -Verhältnis aus den Näherungsfunktionen gewonnen werden – tatsächlich war die Bestimmung des R -Verhältnisses eine der Hauptmotivationen für die in [22, 24–26] durchgeführte Rekonstruktion der Dreischleifenbeiträge. Ein weiterer möglicher Anwendungsbereich sind Summenregeln in Kombination mit konturverbesserter Störungstheorie (CIPT) [63–65]. Hierfür wird die volle Energie- und Massenabhängigkeit der Polarisationsfunktionen benötigt.

Eine mögliche Grundlage für die näherungsweise Rekonstruktion der Polarisationsfunktionen ist das Verfahren der Padé-Approximation. Hierbei wird eine Funktion $f(x)$ durch gebrochenrationale Approximanten der Form

$$[n/m](x) = \frac{\sum_{i=0}^n a_i x^i}{1 + \sum_{i=1}^m b_i x^i} \quad (2.25)$$

angenähert. Die Koeffizienten a_i, b_i werden dabei aus den bekannten Funktionswerten $f(x_k)$ oder den j ten Ableitungen $f^{(j)}(x_k)$ an beliebigen Punkten x_k über die Forderung

$$[n/m]^{(j)}(x_k) = f^{(j)}(x_k) \quad (2.26)$$

bestimmt. Für eine eindeutige Bestimmung der Koeffizienten werden (sofern das entsprechende Gleichungssystem überhaupt lösbar ist) $n + m + 1$ dieser Bedingungen benötigt.

Bei einer ganzen Reihe von Funktionenklassen liefert die Padé-Approximation hervorragende Annäherungen. Für Stieltjes-Funktionen, d.h. Funktionen $f(z)$ mit der Darstellung

$$f(z) = \int_0^\infty ds \frac{\phi(s)}{1 - sz} \quad (2.27)$$

mit einer beschränkten nichtnegativen Funktion $\phi(s)$, ist die Konvergenz der Approximanten $[m + j/m]$ für $m \rightarrow \infty$ mit festem $j \geq -1$ außerhalb der positiven reellen Halbachse sogar bewiesen [66]. Die Polarisationsfunktionen $\Pi^\delta(z)$ mit $\delta \in \{v, a, s, p\}$ erfüllen dieses Kriterium (siehe auch [67]); leider bedeutet das nicht, dass die Näherungsfunktionen auch für die Koeffizienten $\Pi^{(i),\delta}(z)$ der Störungsreihe in α_s konvergieren. Tatsächlich stellt sich sogar heraus, dass die Vierschleifenkoeffizienten die Anforderungen an Stieltjes-Funktionen nicht erfüllen, da ihr Beitrag zum R -Verhältnis an manchen Stellen negativ ist. Dennoch erscheint ein „gutes“ Verhalten der Näherung auch in diesem Fall plausibel. Tatsächlich wurde das hier beschriebene padébasierte Verfahren bereits mehrfach erfolgreich zur Rekonstruktion von Koeffizienten $\Pi^{(i),\delta}(z)$ eingesetzt [22, 24–26].

Da die Koeffizienten der Polarisationsfunktionen im Gegensatz zu den Padé-Approximanten keine meromorphen Funktionen sind, kann insbesondere ihr Verzweigungsschnitt für $z \geq 1$ nicht durch das reine, unmodifizierte Padé-Verfahren reproduziert werden. Dieser Schnitt zeigt sich in den bekannten Entwicklungen der Polarisationsfunktionen im Schwellen- und im Hochenergiebereich durch Logarithmen, die offensichtlich in den entsprechenden Entwicklungen der Padé-Approximanten nicht auftreten können. Somit wären die Schwellen- und Hochenergieentwicklungen der Polarisationsfunktionen für die Konstruktion der Näherungsfunktionen nutzlos.

Um diese zusätzliche Information dennoch nutzen zu können und den Verzweigungsschnitt zumindest teilweise zu reproduzieren, werden die Polarisationsfunktionen zunächst aufgespalten:

$$\Pi^{(i),\delta}(z) = \Pi_{\text{reg}}^{(i),\delta}(z) + \Pi_{\text{log}}^{(i),\delta}(z). \quad (2.28)$$

Dabei ist $\Pi_{\text{log}}^{(i),\delta}(z)$ eine Funktion, die sämtliche bekannten logarithmischen Beiträge in den Schwellen- und Hochenergieentwicklungen enthält. Dem gegenüber ist $\Pi_{\text{reg}}^{(i),\delta}(z)$ bis zur jeweils höchsten verfügbaren Entwicklungsordnung regulär und kann durch die Padé-Methode näherungsweise rekonstruiert werden. Diese Forderung legt nur den logarithmischen Anteil von $\Pi_{\text{log}}^{(i),\delta}(z)$ fest und liefert somit keine eindeutige Definition dieser Funktion. Dies kann ausgenutzt werden, um durch unterschiedliche Konstruktionsvorschriften verschiedene Näherungsfunktionen zu erhalten. Die Abweichungen der Approximanten untereinander bietet dann eine Möglichkeit, den Fehler des Näherungsverfahrens abzuschätzen.

Bei der Konstruktion der Subtraktionsfunktionen $\Pi_{\text{log}}^{(i),\delta}(z)$ muss darauf geachtet werden, dass keine ungewollten zusätzlichen Singularitäten auftreten. Hierzu ist es sinnvoll, als Basis analytische Ergebnisse für die Polarisationsfunktion des

Vektorstroms aus niedrigeren Ordnungen Störungstheorie zu verwenden [21]:

$$\Pi^{(0),v}(z) = \frac{3}{16\pi^2} \left(\frac{20}{9} + \frac{4}{3z} - \frac{4(1-z)(1+2z)}{3z} G(z) \right), \quad (2.29)$$

$$\begin{aligned} \Pi^{(1),v}(z) = & \frac{3}{16\pi^2} \left[\frac{5}{6} + \frac{13}{6z} - (1-z) \frac{3+2z}{z} G(z) + (1-z) \frac{1-16z}{6z} G(z)^2 \right. \\ & \left. - \frac{1+2z}{6z} \left(1 + 2z(1-z) \frac{d}{dz} \right) \frac{I(z)}{z} \right]. \end{aligned} \quad (2.30)$$

Dabei gilt

$$\begin{aligned} I(z) = & 6(\zeta_3 + 4\text{Li}_3(-u) + 2\text{Li}_3(u)) - 8(2\text{Li}_2(-u) + \text{Li}_2(u)) \log(u) \\ & - 2(2\log(1+u) + \log(1-u)) \log(u)^2, \end{aligned} \quad (2.31)$$

$$G(z) = \frac{1}{2z} \frac{\log(u)}{\sqrt{1-\frac{1}{z}}}, \quad u = \frac{\sqrt{1-\frac{1}{z}}-1}{\sqrt{1-\frac{1}{z}}+1}. \quad (2.32)$$

Zunächst soll diskutiert werden, wie sich eine Hilfsfunktion $\Pi_{\log, \text{thr}}^{(i),\delta}(z)$ so konstruieren lässt, dass sämtliche in der Schwellenentwicklung auftretenden Logarithmen absorbiert werden. Anschließend muss dieser erste Ansatz modifiziert werden, damit zusätzlich die logarithmischen Beiträge im Hochenergielimes berücksichtigt werden können. Im Folgenden wird stets speziell der Vierschleifenbeitrag besprochen – die grundlegende Vorgehensweise ist dabei allerdings unabhängig von der konkreten Schleifenzahl, sodass das hier diskutierte Verfahren analog auch auf Beiträge aus anderen Ordnungen angewandt werden kann.

Die Schwellenentwicklungen der Vierschleifenkorrekturen zu den Polarisationsfunktionen im On-shell-Schema sind in [34, 35] angegeben; sie lauten in numerischer Form

$$\begin{aligned} \Pi^{(3),v}(z) = & \frac{2,63641}{1-z} + \frac{-27,2677 + 0,678207 n_l}{\sqrt{1-z}} + K_0^{(3),v} \\ & + (-9,47414 + 0,574190 n_l) \frac{\log(1-z)}{\sqrt{1-z}} \\ & + (-17,5557 + 2,37068 n_l - 0,0690848 n_l^2) \log(1-z) \\ & + (1,31710 + 0,0312341 n_l + 0,00194703 n_l^2) \log(1-z)^2 \\ & + (-0,630208 + 0,0763889 n_l - 0,00231481 n_l^2) \log(1-z)^3 \\ & + \mathcal{O}(\sqrt{1-z}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Pi^{(3),p}(z) &= \frac{2,63641}{1-z} + \frac{-24,9710 + 0,678207 n_l}{\sqrt{1-z}} + K_0^{(3),p} \\
 &\quad + (-9,47414 + 0,574190 n_l) \frac{\log(1-z)}{\sqrt{1-z}} \\
 &\quad + (-10,9576 + 2,56218 n_l - 0,0690848 n_l^2) \log(1-z) \\
 &\quad + (3,23760 + 0,00345635 n_l + 0,00194703 n_l^2) \log(1-z)^2 \\
 &\quad + (-0,630208 + 0,0763889 n_l - 0,00231481 n_l^2) \log(1-z)^3 \\
 &\quad + \mathcal{O}(\sqrt{1-z}), \\
 \Pi^{(3),a}(z) &= -0,731082 \log(1-z) + K_0^{(3),a} + \mathcal{O}(\sqrt{1-z}), \\
 \Pi^{(3),s}(z) &= -1,09662 \log(1-z) + K_0^{(3),s} + \mathcal{O}(\sqrt{1-z}), \tag{2.33}
 \end{aligned}$$

wobei n_l der Zahl der leichten Quarks entspricht. Die Koeffizienten $K_0^{(3),\delta}$ sind bislang unbekannt. Entsprechende analytische Ausdrücke für die Entwicklungen sind in Anhang A.2 angegeben. Die in der Entwicklung auftretenden Terme der Form $(\sqrt{1-z})^i \log(1-z)^j$ mit $j > 0$ müssen in die Subtraktionsfunktionen absorbiert werden. Hierbei sind die Schwellenentwicklungen der Hilfsfunktionen $G(z)$ und $\Pi^{(1),v}(z)$ nützlich:

$$G(z) = \frac{\pi}{2} \frac{1}{\sqrt{1-z}} + \mathcal{O}((1-z)^0), \tag{2.34}$$

$$\Pi^{(1),v}(z) = -\frac{3}{16} \log(1-z) + \text{konst} + \mathcal{O}(\sqrt{1-z}). \tag{2.35}$$

Offensichtlich können Logarithmen also über $\Pi^{(1),v}(z)$ und Potenzen von $\frac{1}{\sqrt{1-z}}$ über $G(z)$ ausgedrückt werden. Dies legt folgenden Ansatz für die Funktion $\Pi_{\log, \text{thr}}^{(3),\delta}(z)$ nahe:

$$\Pi_{\log, \text{thr}}^{(3),\delta}(z) = \sum_{j>0, i} k_{ij} [G(z)]^i [\Pi^{(1),v}(z)]^j. \tag{2.36}$$

Die Grenzen der Summation sind dabei durch die in den Schwellenentwicklungen der Polarisationsfunktionen auftretenden logarithmischen Terme der Form $(\sqrt{1-z})^i \log(1-z)^j$ gegeben. Die Forderung, dass sich bei Entwicklung um $z = 1$ die selben logarithmischen Beiträge wie in der jeweiligen Polarisationsfunktion ergeben sollen, führt zu einem LGS in den Koeffizienten k_{ij} , die dadurch eindeutig bestimmt werden.

In $\Pi_{\log}^{(3),\delta}(z)$ müssen neben den Logarithmen in der Schwellenentwicklung auch die in der Hochenergieentwicklung absorbiert werden. Hier lauten die Polarisations-

tionsfunktionen im On-shell-Schema für $\mu^2 = m_q^2$ in numerischer Form [68–76]

$$\begin{aligned}
 \Pi^{(3),v}(z) = & -10,0036 + 1,37572 n_l - 0,0328147 n_l^2 \\
 & + (-0,357488 + 0,102421 n_l - 0,00218365 n_l^2) \log(-4z) \\
 & + (0,193107 - 0,0254675 n_l + 0,000486744 n_l^2) \log(-4z)^2 \\
 & + (-0,0563482 + 0,00727073 n_l - 0,000234540 n_l^2) \log(-4z)^3 \\
 & + [-7,11044 + 1,01908 n_l - 0,0310950 n_l^2 \\
 & + (-5,88388 + 0,753052 n_l - 0,0146587 n_l^2) \log(-4z) \\
 & + (2,82917 - 0,251016 n_l + 0,00457353 n_l^2) \log(-4z)^2 \\
 & + (-0,416015 + 0,0344773 n_l - 0,000703619 n_l^2) \log(-4z)^3] \frac{1}{z} \\
 & + [H_2^{(3),v} + (-7,85787 + 0,987298 n_l - 0,0260187 n_l^2) \log(-4z) \\
 & + (0,215865 + 0,0367569 n_l - 0,000883940 n_l^2) \log(-4z)^2 \\
 & + (0,525948 - 0,0435071 n_l + 0,000674302 n_l^2) \log(-4z)^3 \\
 & + (-0,0955383 + 0,00589281 n_l - 0,0000879524 n_l^2) \log(-4z)^4] \frac{1}{z^2} \\
 & + \mathcal{O}\left(\frac{1}{z^3}\right), \\
 \Pi^{(3),p}(z) = & -25,1130 + 3,48518 n_l - 0,102852 n_l^2 \\
 & + (2,20686 - 0,230808 n_l + 0,0142957 n_l^2) \log(-4z) \\
 & + (6,14249 - 0,637024 n_l + 0,0110499 n_l^2) \log(-4z)^2 \\
 & + (-1,56708 + 0,135388 n_l - 0,00257994 n_l^2) \log(-4z)^3 \\
 & + (0,104004 - 0,00861934 n_l + 0,000175905 n_l^2) \log(-4z)^4 \\
 & + [-1,35821 + 0,177211 n_l - 0,00711947 n_l^2 \\
 & + (-17,9226 + 2,10947 n_l - 0,0515675 n_l^2) \log(-4z) \\
 & + (3,44902 - 0,144872 n_l + 0,00118877 n_l^2) \log(-4z)^2 \\
 & + (0,559407 - 0,0548237 n_l + 0,000820889 n_l^2) \log(-4z)^3 \\
 & + (-0,191077 + 0,0117856 n_l - 0,000175905 n_l^2) \log(-4z)^4] \frac{1}{z} \\
 & + [H_2^{(3),p} + (-7,80715 + 0,685314 n_l - 0,0148423 n_l^2) \log(-4z) \\
 & + (-1,79679 + 0,226979 n_l - 0,00452222 n_l^2) \log(-4z)^2 \\
 & + (1,61678 - 0,107265 n_l + 0,00148053 n_l^2) \log(-4z)^3 \\
 & + (-0,184997 + 0,00989465 n_l - 0,000131929 n_l^2) \log(-4z)^4] \frac{1}{z^2} \\
 & + \mathcal{O}\left(\frac{1}{z^3}\right),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Pi^{(3),a}(z) = & -9,05417 + 1,17501 n_l - 0,0275071 n_l^2 \\
 & + (-0,357488 + 0,102421 n_l - 0,00218365 n_l^2) \log(-4z) \\
 & + (0,193107 - 0,0254675 n_l + 0,000486744 n_l^2) \log(-4z)^2 \\
 & + (-0,0563482 + 0,00727073 n_l - 0,000234540 n_l^2) \log(-4z)^3 \\
 & + [15,8531 - 2,36372 n_l + 0,0700597 n_l^2 \\
 & + (-5,65395 + 0,850654 n_l - 0,0286846 n_l^2) \log(-4z) \\
 & + (-3,72933 + 0,420485 n_l - 0,00717996 n_l^2) \log(-4z)^2 \\
 & + (1,15106 - 0,100911 n_l + 0,00187632 n_l^2) \log(-4z)^3 \\
 & + (-0,104004 + 0,00861934 n_l - 0,000175905 n_l^2) \log(-4z)^4] \frac{1}{z} \\
 & + [H_2^{(3),a} + (6,89148 - 0,858786 n_l + 0,0213308 n_l^2) \log(-4z) \\
 & + (-0,537351 - 0,00471280 n_l + 0,000272690 n_l^2) \log(-4z)^2 \\
 & + (-0,444548 + 0,0443867 n_l - 0,000850207 n_l^2) \log(-4z)^3 \\
 & + (0,0955383 - 0,00589281 n_l + 0,0000879524 n_l^2) \log(-4z)^4] \frac{1}{z^2} \\
 & + \mathcal{O}\left(\frac{1}{z^3}\right), \\
 \Pi^{(3),s}(z) = & -32,1410 + 4,42783 n_l - 0,125454 n_l^2 \\
 & + (2,20686 - 0,230808 n_l + 0,0142957 n_l^2) \log(-4z) \\
 & + (6,14249 - 0,637024 n_l + 0,0110499 n_l^2) \log(-4z)^2 \\
 & + (-1,56708 + 0,135388 n_l - 0,00257994 n_l^2) \log(-4z)^3 \\
 & + (0,104004 - 0,00861934 n_l + 0,000175905 n_l^2) \log(-4z)^4 \\
 & + [40,4451 - 5,58423 n_l + 0,173022 n_l^2 \\
 & + (-27,2831 + 3,37357 n_l - 0,0984771 n_l^2) \log(-4z) \\
 & + (-8,17872 + 0,943070 n_l - 0,0168387 n_l^2) \log(-4z)^2 \\
 & + (4,73545 - 0,353041 n_l + 0,00527714 n_l^2) \log(-4z)^3 \\
 & + (-0,573230 + 0,0353569 n_l - 0,000527714 n_l^2) \log(-4z)^4] \frac{1}{z} \\
 & + [H_2^{(3),s} + (16,9813 - 1,84595 n_l + 0,0461425 n_l^2) \log(-4z) \\
 & + (-5,04041 + 0,162549 n_l + 0,00179429 n_l^2) \log(-4z)^2 \\
 & + (-1,58168 + 0,153983 n_l - 0,00233074 n_l^2) \log(-4z)^3 \\
 & + (0,554991 - 0,0296839 n_l + 0,000395786 n_l^2) \log(-4z)^4] \frac{1}{z^2} \\
 & + \mathcal{O}\left(\frac{1}{z^3}\right), \tag{2.37}
 \end{aligned}$$

wobei die durch Gl. (1.9) definierten Hochenergiekoeffizienten $H_2^{(3),\delta}$ unbekannt sind. Die hier auftretenden Logarithmen können über $G(z)$ erzeugt werden: Im Hochenergielimes gilt

$$G(z) = \frac{-\log(-4z)}{2z} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{z^2}\right). \quad (2.38)$$

$G(z)$ alleine erzeugt jedoch auch zusätzliche Logarithmen im Schwellenbereich (siehe Gl. (2.34)). Um dies zu vermeiden könnte zunächst stattdessen die Kombination $\sqrt{1-z}G(z)$ verwendet werden. Dies kann allerdings wiederum zu halbzahligen Potenzen von z in der Hochenergieentwicklung führen. Diese lassen sich vermeiden, indem die Potenz von $1-z$ immer zur nächsten ganzen Zahl aufgerundet wird.⁴ Der komplette Ansatz für $\Pi_{\log}^{(3),\delta}(z)$ einschließlich der Behandlung der Schwellenterme ist damit

$$\Pi_{\log}^{(3),\delta}(z) = \sum_{j>0,i} k_{ij} [G(z)]^i [\Pi^{(1),v}(z)]^j + \sum_{m,n \geq 0} d_{mn} \frac{1}{z^m} (zG(z))^n \left(1 - \frac{1}{z}\right)^{\lceil \frac{n}{2} \rceil} \quad (2.39)$$

mit

$$\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil = \begin{cases} \frac{n+1}{2} & n \text{ ungerade} \\ \frac{n}{2} & n \text{ gerade} \end{cases}. \quad (2.40)$$

Die Koeffizienten d_{mn} mit $n > 0$ werden analog zum Fall der Schwellenentwicklung durch die Bedingung festgelegt, dass die Hochenergielogarithmen korrekt reproduziert werden. Dadurch treten nun wiederum unerwünschte Pole in $1/z$ in der Niederenergieentwicklung auf. Diese können durch geeignete Wahl der Koeffizienten d_{m0} mit $m > 0$ aufgehoben werden. Schließlich wird der verbleibende freie Koeffizient d_{00} so festgelegt, dass $\Pi_{\log}^{(3),\delta}(0) = 0$ gilt. Der Vorteil dieser Normierung liegt darin, dass die verbleibende reguläre Funktion $\Pi_{\text{reg}}^{(3),\delta}(z)$ weiterhin die On-shell-Bedingung für $z = 0$ erfüllt, also $\Pi_{\text{reg}}^{(3),\delta}(0) = \Pi^{(3),\delta}(0) = 0$ gilt.

Wie erwähnt sind auch andere Konstruktionen für $\Pi_{\log}^{(3),\delta}(z)$ als die hier vorgestellte denkbar. Über die Unterschiede, die sich durch Wahl unterschiedlicher Subtraktionsvorschriften ergeben, kann abgeschätzt werden, wie gut das Näherungsverfahren die tatsächlichen Polarisationsfunktionen rekonstruiert. Zur Variation der Subtraktionsfunktion können zusätzliche freie Parameter in den Koeffizienten in Gl. (2.39) eingeführt werden [34].

Dazu werden für die Vektor- und die pseudoskalare Polarisationsfunktion die Schwellenkoeffizienten k_{03} und k_{11} mit Faktoren $a_1 + 1/z$ bzw. $a_2 + 1/z$ multipliziert. In der Hochenergieentwicklung werden alle Koeffizienten d_{m3} mit $1 + 1/(b_1 z)$ und alle Koeffizienten d_{m4} mit $1 + 1/(b_2 z)$ multipliziert. Die zugehörigen

⁴Selbstverständlich sind auch höhere ganzzahlige Potenzen möglich. Der hier gewählte minimale Wert führt allerdings zu einer größeren Variation durch die später eingeführten Parameter und somit zu einer zuverlässigeren Fehlerabschätzung.

Terme entsprechen grob den führenden Logarithmen im Schwellen- bzw. Hochenergiebereich; bei diesen Termen wird die größte Variation durch die Einführung zusätzlicher Parameter erwartet.

Für die Axialvektorströme und die skalaren Ströme ist jeweils nur ein Term in der Schwellenentwicklung bekannt; dieser wird mit dem Faktor $a_1 + 1/z$ modifiziert. Um wieder vier freie Parameter zur Verfügung zu haben, werden hier für die führenden drei Logarithmen in der Hochenergieentwicklung zusätzliche Faktoren $1 + 1/(b_1 z)$, $1 + 1/(b_2 z)$ und $1 + 1/(b_3 z)$ eingeführt.

Für $a_l = -1$ und $b_l = 0$ führen die Faktoren zu einer Verschiebung der Entwicklungsordnung⁵, d.h. einem um 1 erhöhten Wert von i bzw. m ; damit könnten die Logarithmen der ursprünglichen Ordnung nicht absorbiert werden. Abgesehen von diesen Einschränkungen können die Parameter im Prinzip beliebige Werte annehmen. Für $a_l, b_l \rightarrow \pm\infty$ entsprechen die Modifikationen jedoch lediglich Multiplikationen mit konstanten Faktoren, die durch Redefinition der Koeffizienten k_{ij} bzw. d_{nm} absorbiert werden können. Aus diesem Grund erscheint es nicht sinnvoll, mehrere verschiedene große Werte für die Koeffizienten einzusetzen. Für die hier gezeigten Ergebnisse wurden

$$\begin{aligned} a_l &\in \{-1 \pm 1, -1 \pm 4, -1 \pm 16, -1 \pm 64\}, \\ b_l &\in \{\pm 1, \pm 4, \pm 16, \pm 64\}, \end{aligned} \quad (2.41)$$

als Wertebereiche gewählt.

Im Prinzip ist es nun möglich, die verbleibende Funktion $\Pi_{\text{reg}}^{(3),\delta}(z)$ durch Padé-Approximation anzunähern. Die Baker-Gammel-Wills-Vermutung [77] (siehe Anhang A.5) legt allerdings nahe, dass sich das Konvergenzverhalten der Approximanten durch eine Abbildung der komplexen Zahlenebene auf einen Kreis weiter verbessern lässt. Durch die Variablentransformation

$$z \rightarrow z(\omega) = \frac{4\omega}{(1+\omega)^2} \quad (2.42)$$

wird die komplexe Ebene in den Einheitskreis überführt; der Schnitt bei $z \geq 1$ wird dabei auf den Kreisrand $|\omega| = 1$ abgebildet (siehe Abbildung 2.9). Die entsprechende Rücktransformation ist durch

$$\omega \rightarrow \omega(z) = \frac{1 - \sqrt{1-z}}{1 + \sqrt{1-z}} \quad (2.43)$$

gegeben. Nach Anwendung der Transformation soll nun $\Pi_{\text{reg}}^{(3),\delta}(\omega)$ durch Padé-

⁵Natürlich wären die Faktoren $1 + 1/(b_l z)$ in der Hochenergieentwicklung für $b_l \rightarrow 0$ zunächst divergent. Diese Singularität ließe sich aber trivial beheben, indem statt der ursprünglichen Faktoren die für $b_l \neq 0$ äquivalente Form $b_l + 1/z$ gewählt würde.

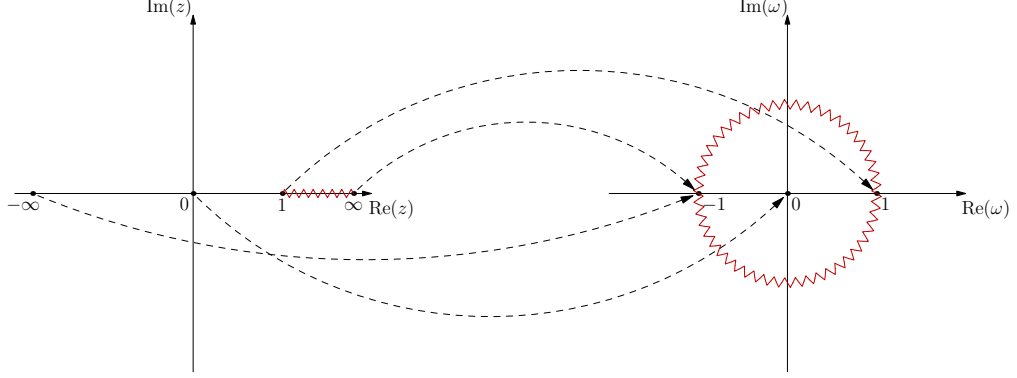


Abbildung 2.9: Konforme Abbildung der komplexen Zahlenebene auf den Einheitskreis. Die Punkte $z = 0$ und $z = 1$ entsprechen jeweils $\omega = 0$ und $\omega = 1$. Sowohl $z = +\infty$ als auch $z = -\infty$ werden auf $\omega = -1$ abgebildet. Der Teil des Schnitts mit $\text{Im}(z) > 0$ bildet den Rand des oberen Halbkreises in der ω -Ebene, der Teil mit $\text{Im}(z) < 0$ entsprechend den des unteren Halbkreises.

Approximation rekonstruiert werden. Dazu werden aus den bekannten Entwicklungen im Niederenergie-, Schwellen- und Hochenergiebereich über Bedingungen der in Gl. (2.26) angegebenen Form die Koeffizienten der Approximanten bestimmt. Die Schwellen- und Hochenergieentwicklungen wurden bereits in Gl. (2.33) bzw. (2.37) angegeben. Die Niederenergieentwicklungen der Polarisationsfunktionen im On-shell Schema mit $\mu^2 = m_q^2$ sind gegeben durch [29–33]

$$\begin{aligned}
 \Pi^{(3),v}(z) &= (10,6103 - 1,30278 n_l + 0,0282783 n_l^2)z \\
 &\quad + (10,4187 - 1,12407 n_l + 0,0223706 n_l^2)z^2 \\
 &\quad + (10,2031 - 1,01971 n_l + 0,0194021 n_l^2)z^3 + \mathcal{O}(z^4), \\
 \Pi^{(3),p}(z) &= (0,812723 - 0,190853 n_l + 0,00721861 n_l^2)z \\
 &\quad + (6,33595 - 0,693155 n_l + 0,0145600 n_l^2)z^2 \\
 &\quad + (8,36076 - 0,803494 n_l + 0,0154075 n_l^2)z^3 \\
 &\quad + (9,14377 - 0,818646 n_l + 0,0149416 n_l^2)z^4 + \mathcal{O}(z^5), \\
 \Pi^{(3),a}(z) &= (4,84212 - 0,610731 n_l + 0,0141353 n_l^2)z \\
 &\quad + (2,93924 - 0,335580 n_l + 0,00716845 n_l^2)z^2 \\
 &\quad + (2,06278 - 0,222971 n_l + 0,00461424 n_l^2)z^3 + \mathcal{O}(z^4), \\
 \Pi^{(3),s}(z) &= (0,123690 - 0,0679839 n_l + 0,00455586 n_l^2)z \\
 &\quad + (1,78515 - 0,232769 n_l + 0,00574404 n_l^2)z^2 \\
 &\quad + (1,92442 - 0,215014 n_l + 0,00469613 n_l^2)z^3 + \mathcal{O}(z^4). \quad (2.44)
 \end{aligned}$$

Die Entwicklungen um $z = 0$ und $z = 1$ entsprechen direkt Entwicklungen um $\omega = 0$ bzw. $\omega = 1$. Um die Koeffizienten der Hochenergieentwicklung ebenfalls

direkt ausnutzen zu können, wird in der Praxis nicht $\Pi_{\text{reg}}^{(3),\delta}(\omega)$ selbst, sondern die Hilfsfunktion

$$P_n(\omega) = \frac{(z(\omega))^n}{4\omega} \left(\Pi_{\text{reg}}^{(3),\delta}(\omega) - \sum_{j=0}^{n-1} (z(\omega))^{-j} \frac{1}{j!} \left(\frac{d}{d(1/z)} \right)^j \Pi_{\text{reg}}^{(3),\delta}(z) \Big|_{z=-\infty} \right) \quad (2.45)$$

mit $z(\omega) = 4\omega/(1+\omega)^2$ angenähert [26]. Dabei entspricht n der höchsten (vollständig) bekannten Potenz von $1/z$ in der Hochenergieentwicklung der entsprechenden Polarisationsfunktion. Die Coulomb-Singularitäten der Form $1/(1-z)$ in den Schwellenentwicklungen der Vektor- und der pseudoskalaren Polarisationsfunktion lassen sich durch einen zusätzlichen Faktor $1/(1-\omega)^2$ in der Definition (2.45) direkt in die Hilfsfunktion absorbieren.

Damit entsprechen $P_n(1)$ und die Ableitungen von $P_n(\omega)$ bei $\omega = 1$ den Koeffizienten in der Schwellenentwicklung der Polarisationsfunktionen. Der führende Term in der Hochenergieentwicklung bestimmt $P_n(-1)$; alle weiteren Terme und die m bekannten Koeffizienten in der Niederenergieentwicklung bis z^m ergeben zusammen $P_n(0)$ und die Ableitungen bis $P_n^{(n+m-1)}(0)$.

Mit der hier vorgestellten Konstruktion ist es zunächst möglich, dass in der Hochenergieentwicklung der rekonstruierten regulären Funktionen $\Pi_{\text{reg}}^{(3),\delta}(z)$ halbzahlige Potenzen von $1/z$ auftreten; die Entwicklung hätte also die Form

$$\Pi_{\text{reg}}^{(3),\delta}(z) = h_0 + h_1 z^{-1} + h_{\frac{3}{2}} z^{-\frac{3}{2}} + h_2 z^{-2} + h_{\frac{5}{2}} z^{-\frac{5}{2}} + \mathcal{O}(z^{-3}). \quad (2.46)$$

Um diese Beiträge auszuschließen, werden wie in [34] die zwei zusätzlichen Bedingungen $h_{\frac{3}{2}} = 0$ und $h_{\frac{5}{2}} = 0$ an $\Pi_{\text{reg}}^{(3),\delta}(z)$ gestellt. Diese Bedingungen haben nicht die in Gl. (2.26) geforderte Form; es handelt sich damit bei dem hier verwendeten Verfahren nicht mehr um eine reine Padé-Approximation und die Koeffizienten sind durch die gestellten Forderungen im Allgemeinen nicht mehr eindeutig bestimmt. Die jeweilige Gesamtzahl der zur Verfügung stehenden Bedingungen zur Berechnung der Koeffizienten bei der Rekonstruktion der vier verschiedenen Polarisationsfunktionen ist in Tabelle 2.2 aufgeführt.

Einige der Padé-Approximanten zeigen ein unphysikalisches Verhalten. Zum Einen können Pole innerhalb des Einheitskreises d.h. in der komplexen z -Ebene auftreten. Da die Polarisationsfunktionen keine solchen Pole aufweisen können, werden die entsprechenden Approximanten verworfen. Da keine weiteren physikalischen Resonanzen oberhalb von $z = 1$ existieren, dürfen auch die Näherungsfunktionen in diesem Bereich kein ausgeprägtes Resonanzverhalten zeigen. Dazu wird das Verhalten der Padé-Approximanten auf dem Kreisrand $|\omega| = 1$ überprüft (siehe Abbildung 2.10). Zeigt ein Approximant ein ausgeprägtes Maximum, d.h.

$$\max \left| [n/m](\omega) \right|_{|\omega|=1} > \rho, \quad (2.47)$$

Strom	Niederenergie	Schwelle	Hochenergie	Gesamt
Vektor	3	2	2 + 2	9
Axialvektor	3	0	2 + 2	7
Skalar	3	0	2 + 2	7
Pseudoskalar	4	2	2 + 2	10

Tabelle 2.2: Zahl der Bedingungen für die Bestimmung der Koeffizienten der Padé-Approximanten aus verschiedenen Entwicklungsregionen. In der Hochenergieregion stammen zwei Bedingungen von den exakt bekannten Taylorkoeffizienten und zwei weitere vom geforderten Verschwinden von Termen mit halbzahligen Potenzen von $1/z$.

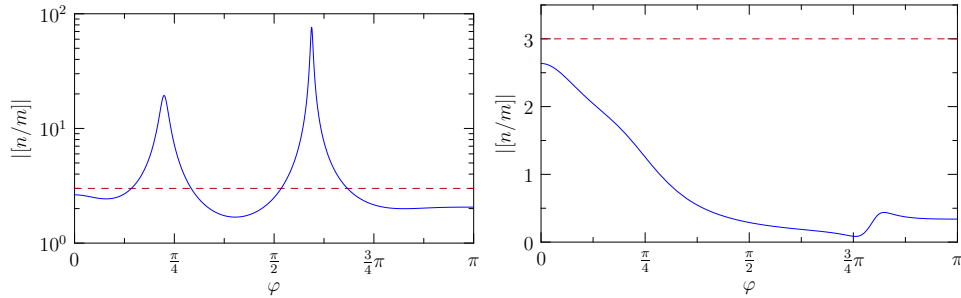


Abbildung 2.10: Verhalten zweier Approximanten auf dem durch $\omega = e^{i\varphi}$ parametrisierten Rand des Einheitskreises. Die Kurven entsprechen jeweils dem Betrag der Approximanten; im linken Schaubild ist dieser logarithmisch dargestellt. Der Abschneideparameter $\rho = 3$ wird durch eine gestrichelte Linie angezeigt. Der im linken Schaubild gezeigte Approximant weist ausgeprägte Resonanzen auf und wird deshalb verworfen.

so wird dieser Approximant ebenfalls verworfen. Dabei wird ρ heuristisch so gewählt, dass einerseits die rekonstruierten Polarisationsfunktionen oberhalb der Schwelle keine deutlich sichtbaren Resonanzen mehr zeigen, andererseits aber immer noch etwa 1000 bis 10000 Approximanten verbleiben. Praktisch wird hier für Axialvektorströme ein Wert von $\rho = 1,2$ und für alle anderen Ströme $\rho = 3$ verwendet.

Aus den verbleibenden Approximanten lassen sich mit Hilfe der Gleichungen (2.45), (2.43) und (2.28) die Polarisationsfunktionen rekonstruieren. Unterhalb der Schwelle sind die Polarisationsfunktionen analytisch und die Qualität der Näherung entsprechend sehr gut, wie in Abbildung 2.11 für den Fall schwerer Charmquarks (d.h. $n_l = 3$) zu sehen ist. Oberhalb der Schwelle zeigt Abbildung 2.12 das jeweilige R -Verhältnis und Abbildung 2.13 den Realteil der Näherungsfunktionen in Abhängigkeit von der Geschwindigkeit $v = \sqrt{1 - 1/z}$ der erzeugten Charmquarks. Hier ist das Ergebnis der Rekonstruktion erwartungsgemäß weniger genau.

Das Verhalten der Näherungsfunktionen im Bereich der Bottomschwelle ($n_l = 4$)

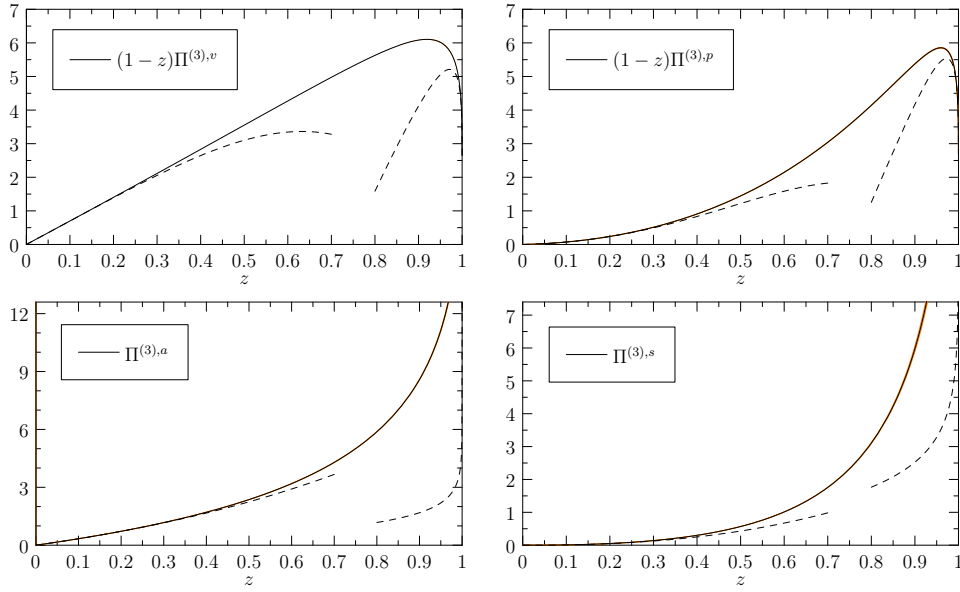


Abbildung 2.11: Rekonstruierte Vierschleifenbeiträge der Polarisationsfunktionen unterhalb der Charmschwelle. Für den Fall von Vektorströmen bzw. pseudoskalaren Strömen wird, um endliche Werte an der Schwelle zu erhalten, $(1-z)\Pi^{(3),\delta}$ gezeigt, ansonsten $\Pi^{(3),\delta}$ selbst. Die Mittelwerte aus allen Approximanten sind als durchgezogene Linien dargestellt; die Streuung der Approximanten ist äußerst gering und liegt im Bereich der Linienbreite. Die gestrichelten Linien entsprechen den bekannten Niederenergie- und Schwellenentwicklungen (Gl. (2.44) und (2.33)). Die konstanten Beiträge in den Schwellenentwicklungen sind unbekannt, sodass nur das asymptotische Verhalten für $z \rightarrow 1$ aussagekräftig ist.

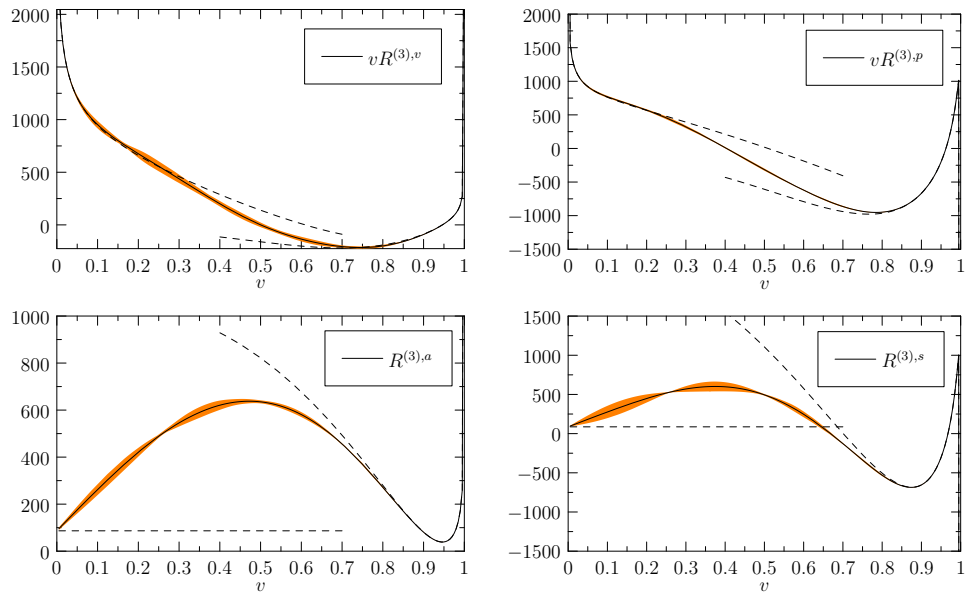


Abbildung 2.12: Vierschleifenbeiträge zum R -Verhältnis für die unterschiedlichen betrachteten Ströme oberhalb der Charmschwelle. Gezeigt werden jeweils $vR^{(3),v} = v12\pi \text{Im}(\Pi^{(3),v})$, $vR^{(3),p} = v8\pi \text{Im}(\Pi^{(3),p})$, $R^{(3),a} = 12\pi \text{Im}(\Pi^{(3),a})$ und $R^{(3),s} = 8\pi \text{Im}(\Pi^{(3),s})$ als Funktionen der Quarkgeschwindigkeit $v = \sqrt{1 - 1/z}$. Die durchgezogenen Linien entsprechen jeweils dem Mittelwert aus allen Näherungsfunktionen, die Bänder zeigen dazu einen Fehler von drei Standardabweichungen. Die gestrichelten Linien sind die bekannten Schwellen- bzw. Hochenergieentwicklungen (siehe Gl. (2.33) und (2.37)).

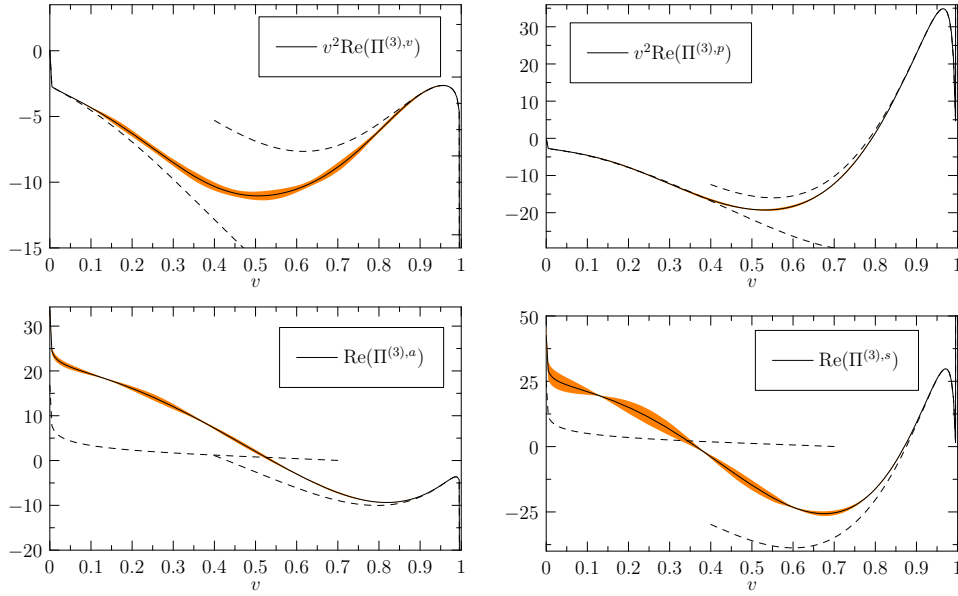


Abbildung 2.13: Realteile der rekonstruierten Polarisationsfunktionen in Abhängigkeit von $v = \sqrt{1 - 1/z}$ oberhalb der Charmschwelle. Die Polarisationsfunktionen der Vektorströme und der pseudoskalaren Ströme wurden mit einem Faktor v^2 multipliziert, um einen endlichen Wert für $v = 0$ zu erhalten.

und im Bereich der Topschwelle ($n_l = 5$) ist mit dem hier gezeigten Fall $n_l = 3$ vergleichbar; ein Satz „typischer“ Approximanten für alle drei Fälle und alle vier betrachteten Ströme steht unter der Adresse

<http://www-ttp.particle.uni-karlsruhe.de/Progdata/ttp09/ttp09-17/> zur Verfügung.

Die genäherten Polarisationsfunktionen können nun entwickelt werden, um Koeffizienten höherer Ordnung in den Niederenergie-, Schwellen- und Hochenergieentwicklungen abzuschätzen. Es zeigt sich, dass die aus einem Großteil der Approximanten gewonnenen Koeffizienten nahe am Mittelwert liegen, wobei die Streuung der Werte für die Niederenergiemomente sehr viel geringer ist als für die Koeffizienten in der Schwellen- oder Hochenergieentwicklung (siehe Abbildung 2.14). Die Form der Verteilung der Koeffizienten legt nahe, als Fehler der Näherung die Standardabweichung anzugeben. Einige wenige Koeffizienten weichen um mehr als 50 Standardabweichungen vom Mittelwert ab; diese werden verworfen.

Die Entwicklungskoeffizienten werden zunächst im On-shell-Schema bestimmt und können anschließend mit Hilfe der in Anhang D.3 angegebenen Formeln in das $\overline{\text{MS}}$ -Schema umgerechnet werden. Die Ergebnisse in beiden Schemata für alle vier Korrelatoren sind in Anhang A.4 aufgeführt, als Beispiel werden in Tabelle 2.3 die für die Entwicklungskoeffizienten für den Vektorstromkorrelator im

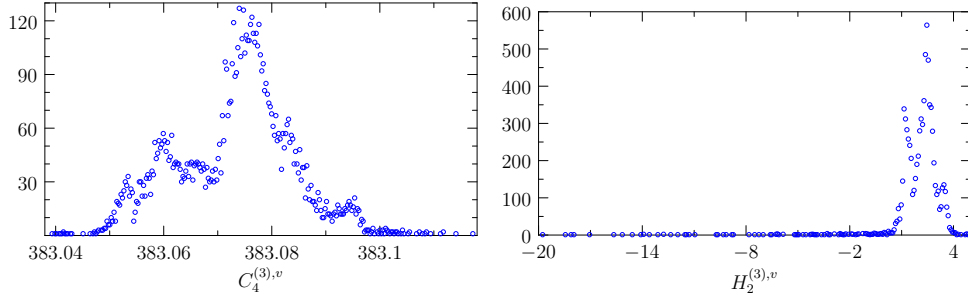


Abbildung 2.14: Verteilungen von On-shell Entwicklungskoeffizienten der Näherungsfunktionen für die Vektorpolarisationsfunktion mit $n_l = 3$ leichten Quarks. Die Umrechnung in das in Tabelle 2.3 verwendete $\overline{\text{MS}}$ -Schema ist in Anhang D.3 angegeben. Auf der linken Seite ist die Verteilung für das vierte Moment $C_4^{(3),v}$ der Niederenergieentwicklung dargestellt, rechts die für den dritten Koeffizienten $H_2^{(3),v}$ in der Hochenergieentwicklung. Aus einzelnen Approximanten ergeben sich Werte unterhalb von -20 für $H_2^{(3),v}$; diese werden hier nicht gezeigt.

$\overline{\text{MS}}$ -Schema erhaltenen Abschätzungen gezeigt. Wie zu erwarten, ist die Genauigkeit der Näherung im Niederenergiebereich erheblich besser als im Schwellen- und im Hochenergiebereich.

Für den Fall der Polarisationsfunktion für Vektorströme wurden die Entwicklungsterme unabhängig in zwei weiteren Arbeiten abgeschätzt. In [34] wurde ein sehr ähnliches Verfahren angewandt; allerdings standen zu diesem Zeitpunkt das dritte Niederenergiemoment sowie die Koeffizienten $H_0^{(3),v}$ und $H_1^{(3),v}$ (siehe Gl. (1.9)) in der Hochenergieentwicklung noch nicht zur Konstruktion der Padé-Approximanten zur Verfügung. Hingegen wurden die Koeffizienten in [36] aus dem Verhalten der Momente für $n \rightarrow \infty$ abgeschätzt, welches wiederum über Mellin-Transformation aus Schwellen- und Hochenergiekoeffizienten bestimmt wurde. Die Ergebnisse der drei Analysen werden in Tabelle 2.4 verglichen. Während die Werte der Koeffizienten insgesamt sehr gut übereinstimmen, weisen die hier vorgestellten Ergebnisse einen merklich geringeren Fehler auf.

	$n_l = 3$	$n_l = 4$	$n_l = 5$
$\bar{C}_1^{(3),v}$	-5,6404	-7,7624	-9,6923
$\bar{C}_2^{(3),v}$	-3,4937	-2,6438	-1,8258
$\bar{C}_3^{(3),v}$	-2,8395	-1,1745	0,4113
$\bar{C}_4^{(3),v}$	-3,349(11)	-1,386(10)	0,471(9)
$\bar{C}_5^{(3),v}$	-3,737(32)	-1,754(32)	0,104(27)
$\bar{C}_6^{(3),v}$	-3,735(61)	-1,910(63)	-0,228(54)
$\bar{C}_7^{(3),v}$	-3,39(10)	-1,85(10)	-0,46(9)
$\bar{C}_8^{(3),v}$	-2,85(13)	-1,67(14)	-0,66(12)
$\bar{C}_9^{(3),v}$	-2,22(17)	-1,47(18)	-0,91(16)
$\bar{C}_{10}^{(3),v}$	-1,65(20)	-1,37(22)	-1,30(19)
$H_2^{(3),v}$	2,0(42)	1,2(83)	1,4(21)
$K_0^{(3),v}$	17(11)	17(29)	16(10)

Tabelle 2.3: Entwicklungskoeffizienten der rekonstruierten Polarisationsfunktion für Vektorströme. Die Niederenergiemomente $\bar{C}_n^{(3),v}$ sind im $\overline{\text{MS}}$ -Schema angegeben, die Schwellen- und Hochenergiekonstanten im On-shell-Schema. Gezeigt werden je die Ergebnisse für n_l verschiedene leichte Quarks. Die Momente $\bar{C}_{1-3}^{(3),v}$ sind exakt bekannt. Der Fehler bezieht sich stets auf die letzten angegebenen Ziffern, d.h. 2,0(42) steht für einen Fehler von 4,2. Für die genaue Definition der Koeffizienten siehe Gl. (1.8)-(1.10).

	$\bar{C}_4^{(3),v}$	$\bar{C}_5^{(3),v}$	$\bar{C}_6^{(3),v}$	$\bar{C}_7^{(3),v}$	$K_0^{(3),v}$
Hoang et al	$-4,2 \pm 1,2$	$-5,0 \pm 1,7$	$-5,3 \pm 2,0$	$-5,2 \pm 2,3$	-10 ± 11
Greynat, Peris	$-3,6 \pm 0,5$	$-4,4 \pm 1,2$	$-4,7 \pm 1,8$	$-4,6 \pm 2,3$	18 ± 87
Diese Arbeit	-3,349(11)	-3,737(32)	-3,735(61)	-3,39(10)	17(11)

Tabelle 2.4: Vergleich der hier bestimmten Entwicklungskoeffizienten (letzte Zeile) für die Polarisationsfunktion von Vektorströmen mit denen von Hoang, Mateu und Zebaryad [34] bzw. Greynat und Peris [36]. Der Fehler in der letzten Zeile entspricht einer Standardabweichung, in allen anderen Zeilen ist der Größtfehler abgeschätzt. Die Niederenergiemomente sind im $\overline{\text{MS}}$ -Schema angegeben.

2.3.2 Momente nichtdiagonaler Korrelatoren

Während die Bestimmung der Charm- und Bottommassen aus experimentellen Daten nur über den diagonalen Korrelator zweier Vektorströme möglich ist, existiert für die Bestimmung über Gittersimulationen keine solche Einschränkung. Neben den Niederenergiemomenten der diagonalen Korrelatoren sind aus diesem Grund ebenfalls die der nichtdiagonalen von Interesse. Weitere phänomenologisch interessante Anwendungen der nichtdiagonalen Momente sind die Bestimmung der Zerfallskonstanten schwerer Mesonen über Hilbert-Summenregeln [78] und die Berechnung von Korrekturen zum elektroschwachen ρ -Parameter [79–83].

Ebenso wie für die diagonalen Korrelatoren ist auch für die nichtdiagonalen das vollständige analytische Ergebnis zur Ordnung α_s bekannt [84–88]. Auf Dreischleifenniveau wurden bislang die führenden sechs Niederenergiemomente berechnet; zusätzlich sind acht Terme in der Hochenergieentwicklung bekannt [4, 5]. Im Folgenden sollen Methoden zur Berechnung fast beliebig hoher Dreischleifenmomente vorgestellt und entsprechende Ergebnisse diskutiert werden [89].

Das Standardverfahren zur Berechnung von Niederenergiemomenten wurde bereits in Abschnitt 2.3.1 im Zusammenhang mit den diagonalen Korrelatoren beschrieben: Die Entwicklung der ursprünglichen Korrelatoren führt zu Vakuumdiagrammen, welche auf einen kleinen Satz von Masterintegralen zurückgeführt werden. Andererseits ist es natürlich ebenso möglich, zuerst die Reduktion auf Masterintegrale durchzuführen und diese anschließend zu entwickeln (siehe Abbildung 2.15). Zwar ist bei letzterem Verfahren die Reduktion üblicherweise aufwändiger, dafür können jedoch die Masterintegrale sehr effizient entwickelt werden. Diese Methode ist also insbesondere dann sinnvoll, wenn sehr hohe Momente berechnet werden sollen und wurde zu diesem Zweck auch bereits erfolgreich auf die Dreischleifenkorrekturen zu den diagonalen Korrelatoren angewandt [27, 28].

Auf Dreischleifenniveau tragen je 34 Diagramme zu einem nichtdiagonalen Korrelator bei. Die dabei auftretenden Topologien sind in Abbildung 2.16 dargestellt. Für die Reduktion der sich ergebenden propagatorartigen Diagramme können die bereits in Abschnitt 2.3.1 diskutierten Methoden eingesetzt werden. Im letzten Schritt müssen noch die Masterintegrale

$$M_i(q^2, m^2; a_1, \dots, a_8) = \int [dk_1] \int [dk_2] \int [dk_3] \frac{1}{D_1^{a_1} \dots D_8^{a_8}} \quad (2.48)$$

entwickelt werden; hierfür können Differentialgleichungen verwendet werden [90, 91]. Aus Dimensionsbetrachtungen ergibt sich

$$\mathcal{D} M_i(q^2, m^2; a_1, \dots, a_8) = 2 \left(q^2 \frac{\partial}{\partial q^2} + m^2 \frac{\partial}{\partial m^2} \right) M_i(q^2, m^2; a_1, \dots, a_8). \quad (2.49)$$

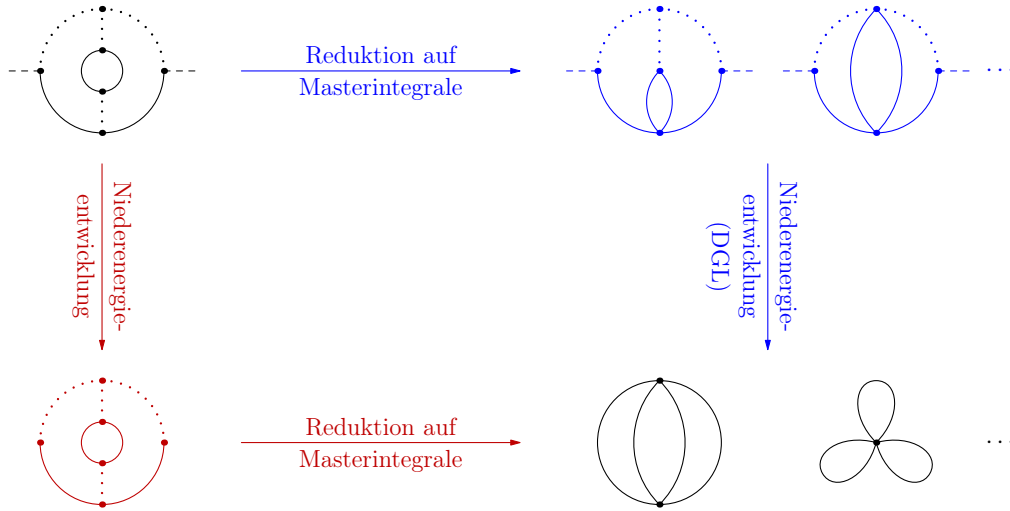


Abbildung 2.15: Mögliche Verfahren zur Reduktion auf Masterintegrale mit nur einer Skala. Beim traditionellen Vorgehen wird vor der Reduktion im äußeren Impuls entwickelt. Bei der zur Berechnung höherer Momente verwendeten Methode wird zuerst die Reduktion auf Masterintegrale mit zwei Skalen durchgeführt.

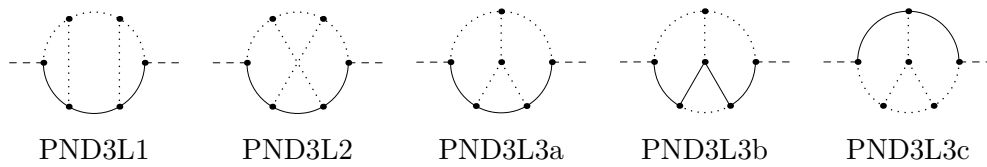


Abbildung 2.16: Topologien der zu den nichtdiagonalen Korrelatoren beitragenden Dreischleifendiagramme.

Die Massendimension $\mathcal{D} M_i$ des Integrals M_i erhält man dabei durch einfaches Abzählen der Schleifenintegrationen und der Propagatoren:

$$\mathcal{D} M_i(q^2, m^2; a_1, \dots, a_8) = (3d - 2(a_1 + \dots + a_8)) M_i(q^2, m^2; a_1, \dots, a_8). \quad (2.50)$$

Das Ausführen der Ableitung nach m^2 auf der rechten Seite von Gl. (2.49) führt zu Integralen mit um 1 erhöhten Propagatorpotenzen für einen der massiven Propagatoren; diese Integrale können wieder auf Masterintegrale reduziert werden. Dadurch ergibt sich ein System gekoppelter linearer Differentialgleichungen:

$$z \frac{\partial}{\partial z} M_i = \sum_j d_{ij} M_j. \quad (2.51)$$

Für die nichtdiagonalen Korrelatoren ist dabei z über $z = q^2/m_q^2$ definiert. Bei einfachen Problemen – beispielsweise den Zweischleifenkorrekturen – kann das entsprechende Differentialgleichungssystem noch vollständig gelöst werden und führt zu analytischen Ergebnissen für die Masterintegrale. Auf Dreischleifenniveau ist dies noch nicht gelungen. Um zumindest die Niederenergieentwicklung zu erhalten, kann folgender Potenzreihenansatz zur Lösung des durch Gl. (2.51) gegebenen Gleichungssystems verwendet werden:

$$M_i = \sum_{k=k_0}^{\infty} c_{ik} z^k. \quad (2.52)$$

Die Koeffizienten c_{ik} entsprechen dabei Vakuumdiagrammen. Durch Koeffizientenvergleich bis zu einer maximalen Ordnung $z^{k_{\max}}$ ergibt sich aus dem System von Differentialgleichungen dann ein LGS für die Koeffizienten c_{ik} .

Da in diesem LGS die Zahl der Unbekannten größer als die Zahl der linear unabhängigen Gleichungen ist, wird für einige Koeffizienten keine Lösung gefunden. Diese Koeffizienten entsprechen Randbedingungen der ursprünglichen Differentialgleichungen. Als Randbedingungen eignen sich besonders die führenden Entwicklungskoeffizienten c_{ik_0} . Ihre Identifizierung mit bekannten Vakuumdiagrammen kann entweder manuell oder mit Hilfe des Programmes **exp** durchgeführt werden. Im einfachsten – und zugleich häufigsten – Fall $k_0 = 0$ entspricht c_{i0} gerade dem Masterintegral M_i mit verschwindendem äußeren Impuls. Die resultierenden Randbedingungen für die Momente der nichtdiagonalen Korrelatoren auf Dreischleifenniveau sind in Abbildung 2.17 dargestellt.

Durch Einsetzen der Reduktion für die Diagramme und der entwickelten Masterintegrale ergeben sich die gewünschten Niederenergiemomente. Die numerischen Ergebnisse für die Momente sind in Anhang B.1 angegeben. In Abbildung 2.18 ist der Einfluss der zusätzlichen Terme auf das Verhalten der Niederenergieentwicklung für $0 \leq z < 1$ dargestellt.

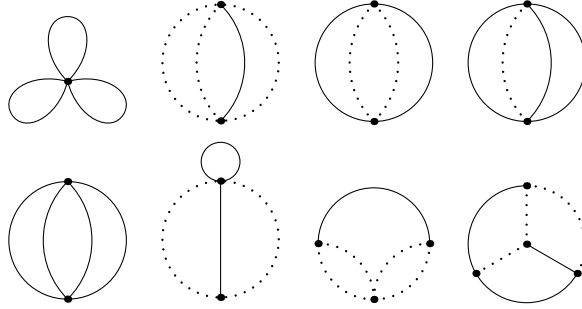


Abbildung 2.17: Randbedingungen des Differentialgleichungssystems in der Niederenergieentwicklung der Masterintegrale.

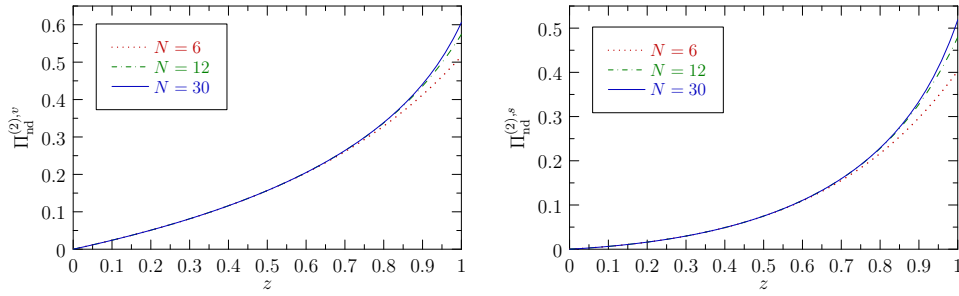


Abbildung 2.18: Verhalten der nichtdiagonalen Vektorpolarisationsfunktion (links) und der nichtdiagonalen skalaren Polarisationsfunktion (rechts) im Niederenergiebereich. Gezeigt werden jeweils die Dreischleifenbeiträge bis zur Ordnung z^N der im On-shell-Schema renormierten Funktionen unterhalb der Charmschwelle ($n_h = 1$, $n_l = 3$).

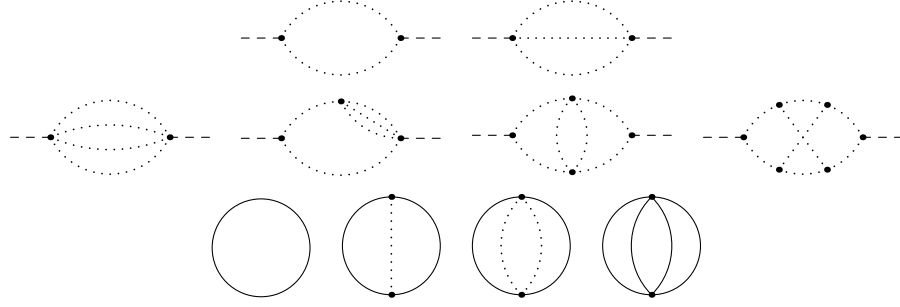


Abbildung 2.19: Zu den Randbedingungen in der Hochenergieentwicklung beitragende Diagramme. Die Randbedingungen entsprechen Produkten der hier gezeigten Diagramme mit insgesamt drei Schleifen.

Ebenso wie die Niederenergiemomente lassen sich im Prinzip durch Modifikation des Potenzreihenansatzes Entwicklungskoeffizienten in beliebigen Energieregionen bestimmen. Dafür müssen im Allgemeinen auch nicht ganzzahlige Potenzen im jeweiligen Entwicklungsparameter berücksichtigt werden; die genaue Form der Abhängigkeit von z kann mit Hilfe von asymptotischer Entwicklung bestimmt werden.

Für die Hochenergieentwicklung beispielsweise ergibt die asymptotische Entwicklung der Masterintegrale Produkte von masselosen Propagatoren mit insgesamt l Schleifen und massiven Vakuumdiagrammen mit $3-l$ Schleifen. Die masselosen Propagatoren führen zu zusätzlichen Faktoren $(-q^2)^{-l\epsilon}$, die nicht durch den naiven Potenzreihenansatz erfasst werden. Um auch diese Beiträge reproduzieren zu können, wird der verallgemeinerte Ansatz

$$M_i = \sum_{k=k_0}^{\infty} (c_{ik} + c_{ik}^{(\epsilon)} z^{-\epsilon} + c_{ik}^{(2\epsilon)} z^{-2\epsilon} + c_{ik}^{(3\epsilon)} z^{-3\epsilon}) \frac{1}{z^k} \quad (2.53)$$

verwendet. Die zusätzlichen Koeffizienten $c_{ik}^{(\epsilon)}, c_{ik}^{(2\epsilon)}, c_{ik}^{(3\epsilon)}$ entsprechen dabei Diagrammen mit masselosen Schnitten. Einsetzen von Gl. (2.53) in Gl. (2.51) führt durch Koeffizientengleich zu einem LGS in den Koeffizienten $c_{ik}^{(l\epsilon)}$; die Randbedingungen $c_{ik_0}^{(l\epsilon)}$ entsprechen in diesem Fall Produkten der in Abbildung 2.19 dargestellten Diagramme. Die resultierenden Ergebnisse für die Koeffizienten der Hochenergieentwicklung sind in Anhang B.2 aufgeführt.

Die Veränderung des Hochenergieverhaltens durch die neu berechneten Terme ist in Abbildung 2.20 zu sehen. Die neu hinzukommenden Beiträge zeigen deutlich, dass die Entwicklung nur in einem schmalen Bereich nahe $v = \sqrt{1-1/z} \approx 1$ konvergiert. Ursache hierfür ist ein weiterer Verzweigungsschnitt in der Polarisationsfunktion durch die mögliche Produktion dreier schwerer Quarks oberhalb von $z = 3^2$ bzw. $v \approx 0,94$. Zwei der zu diesem Prozess beitragenden Diagramme sind in Abbildung 2.21 dargestellt. Diese Interpretation wird durch das Verhal-

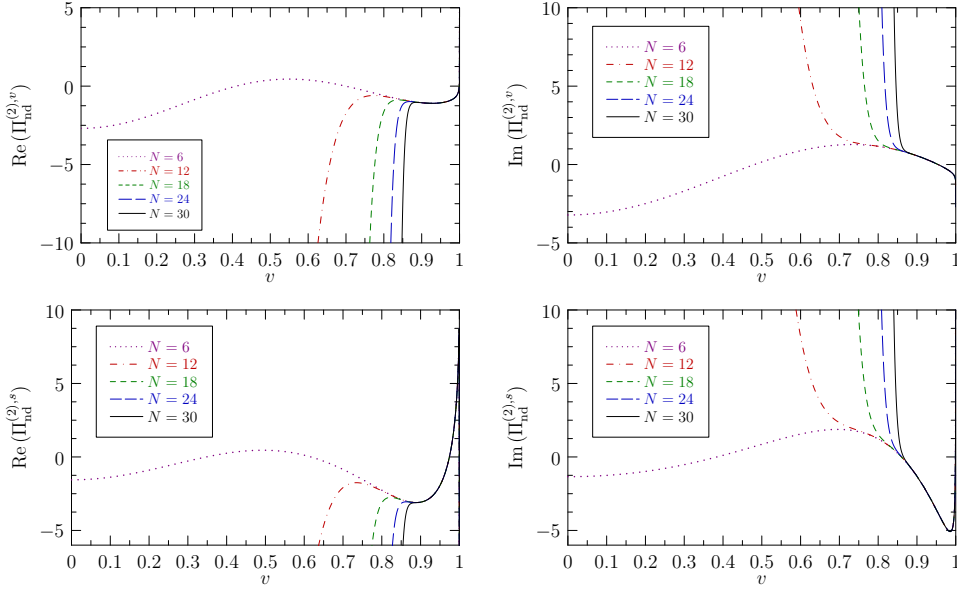


Abbildung 2.20: Hochenergieverhalten der Dreischleifenkorrektur zur Vektorpolarisationsfunktion (oben) und zur skalaren Polarisationsfunktion (unten) bis zur Ordnung z^{-N} in Abhängigkeit von $v = \sqrt{1 - 1/z}$. Auf der linken Seite sind jeweils die Realteile oberhalb der Charmschwelle zu sehen, die entsprechenden Imaginärteile sind auf der rechten Seite dargestellt.

ten der einzelnen Entwicklungskoeffizienten gestützt: Die Koeffizienten $H_{nm}^{(2),\delta}[1]$ und $H_{nm}^{(2),\delta}[n_h]$ erhalten Beiträge von Diagrammen mit dreifach massiven Schnitten und zeigen ein äußerst schlechtes Konvergenzverhalten für große Werte von n . Die zu $H_{nm}^{(2),\delta}[n_l]$ gehörenden Diagramme mit leichten Quarkschleifen dagegen haben nur Schnitte mit je einem massiven Quark; der zu n_l proportionale Beitrag zur Hochenergieentwicklung konvergiert wie in Abbildung 2.22 gezeigt dementsprechend gut.

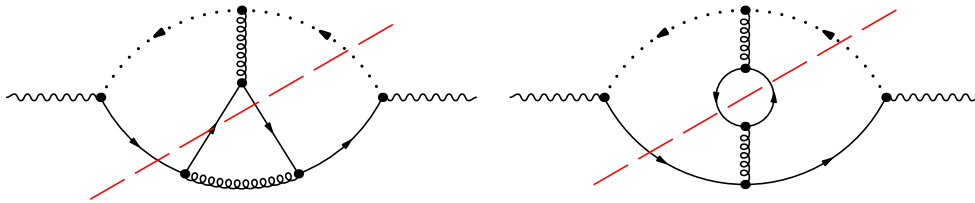


Abbildung 2.21: Beispiele für Diagramme mit dreifach massiven Schnitten in der Berechnung der nichtdiagonalen Stromkorrelatoren. Dieser Diagrammtyp führt zum Zusammenbruch der Hochenergieentwicklung unterhalb von $z = 9$ bzw. $v \approx 0,94$.

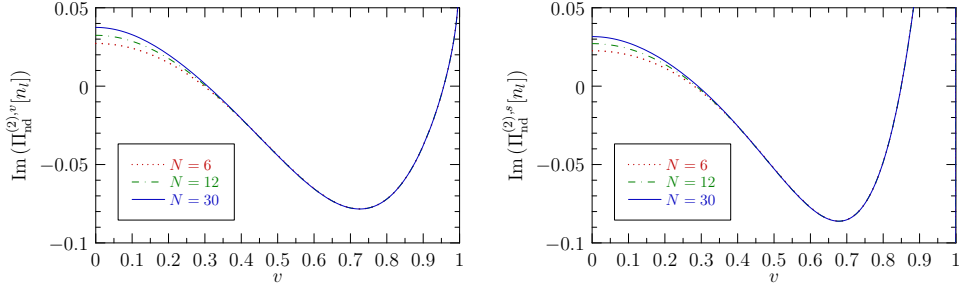


Abbildung 2.22: Zur Zahl n_l der leichten Quarks proportionale Beiträge im Hochenergiebereich bis zur Ordnung z^{-N} für verschiedene Werte von N . Gezeigt ist jeweils der Imaginärteil der Beiträge. Die Entwicklung zeigt eine sehr gute Konvergenz bis hin zur Schwelle bei $v = 0$.

2.4 Ergebnisse für Charm- und Bottommassen

Im Folgenden sollen nun die mit Hilfe der theoretischen Momente gewonnenen Ergebnisse für die Quarkmassen präsentiert und diskutiert werden. Zunächst wird dabei auf die bereits in Abschnitt 2.1 erläuterte Bestimmung aus experimentellen Daten eingegangen. Anschließend werden noch kurz die Ergebnisse für die Charm- und Bottommassen aus dem Vergleich mit Gitterkorrelatoren vorgestellt.

2.4.1 Massen aus experimentellen Daten

Nach der Bestimmung der experimentellen und theoretischen Niederenergiemomente können die Quarkmassen mit Hilfe von Gl. (2.4), also über

$$m_q = \frac{1}{2} \left(\frac{9Q_q^2}{4} \frac{C_n}{\mathcal{M}_n^{\text{exp}}} \right)^{\frac{1}{2n}}, \quad (2.54)$$

berechnet werden. Die theoretischen Momente hängen nur logarithmisch, also über $\log(\mu^2/m_q^2)$, von den Quarkmassen ab. Somit kann Gl. (2.54) für die Bestimmung der $\overline{\text{MS}}$ -Massen $m_q(\mu)$ bei der Skala $\mu = m_q(\mu)$ direkt gelöst werden, da diese Wahl der Skala die Massenabhängigkeit eliminiert. Für eine andere Wahl der Skala müssen die Massen im Allgemeinen iterativ aus Gl. (2.54) bestimmt werden. Dies ist beispielsweise dann der Fall, wenn angenommen wird, dass die relevanten Skalen für die Massenbestimmung eher durch die Massen der Bindungszustände der schweren Quarks gegeben sind, also durch $\mu \sim 3 \text{ GeV}$ für Charmquarks und $\mu \sim 10 \text{ GeV}$ für Bottomquarks.

Für die Abschätzung des theoretischen Fehlers wurden die Quarkmassen $m_q(\mu)$ zunächst bei einer variablen Skala μ' mit $\mu/2 \leq \mu' \leq 2\mu$ bestimmt und an-

schließlich mit Hilfe der Renormierungsgruppengleichung zur Skala μ entwickelt. Weitere Fehlerquellen sind die Unsicherheit der experimentellen Daten, der Fehler in $\alpha_s(M_Z) = 0,1189(20)$ und unbekannte nichtperturbative Beiträge in der Niederenergieentwicklung.

Der nichtperturbative Fehler kann über die Operatorproduktentwicklung des Vektorkorrelators abgeschätzt werden. Der führende nichtperturbative Beitrag hat dabei die Form

$$C^{G^2}(q, m_q) \langle a_s G_{\mu\nu} G^{\mu\nu} \rangle \quad (2.55)$$

mit dem Gluonkondensat [92]

$$\langle a_s G_{\mu\nu} G^{\mu\nu} \rangle = 0,006 \pm 0,012 \text{ GeV}^4. \quad (2.56)$$

Durch Entwicklung in $q^2 < m_q^2$ ergeben sich hieraus die Fehler $\delta\mathcal{M}_n^{\text{np}}$ für die Momente \mathcal{M}_n :

$$\delta\mathcal{M}_n^{\text{np}} = C_n^{G^2}(m_q) \langle a_s G_{\mu\nu} G^{\mu\nu} \rangle \quad (2.57)$$

Die Entwicklungskoeffizienten $C_n^{G^2}(m_q)$ des Wilsonkoeffizienten $C^{G^2}(q, m_q)$ sind gegeben durch [13, 20]

$$\begin{aligned} C_n^{G^2}(m_q) &= \frac{12\pi^2 Q_q^2}{(4m_q^2)^{(n+2)}} a_n (1 + b_n a_s), \\ a_n &= -\frac{2n+2}{15} \frac{\Gamma(4+n)\Gamma(\frac{7}{2})}{\Gamma(4)\Gamma(\frac{7}{2}+n)}, \\ b_1 &= \frac{135779}{12960}, & b_2 &= \frac{1969}{168}, \\ b_3 &= \frac{546421}{42525}, & b_4 &= \frac{661687433}{47628000}. \end{aligned} \quad (2.58)$$

Im Gegensatz zu [10] wurde in dieser Arbeit das On-shell-Schema für die Momente $C_n^{G^2}(m_q)$ des Wilsonkoeffizienten verwendet.

Die führenden vier experimentellen Momente in der Bestimmung der Charmmasse sind zusammen mit dem nichtperturbativen Beitrag in Tabelle 2.5 aufgelistet. Zusammen mit den in Gl. (2.21) angegebenen theoretischen Momenten ergeben sich aus ihnen mit Gl. (2.54) die in den Tabellen 2.6 und 2.7 gezeigten Werte für die Masse des Charmquarks. In Tabelle 2.6 ist der nichtperturbative Fehler mit dem Wilsonkoeffizienten in führender Ordnung abgeschätzt, in Tabelle 2.7 ist zusätzlich die Korrektur der Ordnung α_s berücksichtigt. Für den Fall von Bottomquarks sind die Momente in Tabelle 2.8 angegeben; der nichtperturbative Beitrag ist hier vernachlässigbar klein. Die resultierenden Bottommassen sind in Tabelle 2.9 aufgeführt.

Die aus den verschiedenen Momenten bestimmten Werte für die Charmmassen stimmen hervorragend überein. Den kleinsten Fehler weist dabei die aus

2.4. Ergebnisse für Charm- und Bottommassen

n	$\mathcal{M}_n^{\text{res}}$ $\times 10^{(n-1)}$	$\mathcal{M}_n^{\text{thr}}$ $\times 10^{(n-1)}$	$\mathcal{M}_n^{\text{con}}$ $\times 10^{(n-1)}$	$\mathcal{M}_n^{\text{exp}}$ $\times 10^{(n-1)}$	$\delta\mathcal{M}_n^{\text{np}}(\text{LO})$ $\times 10^{(n-1)}$	$\delta\mathcal{M}_n^{\text{np}}(\text{NLO})$ $\times 10^{(n-1)}$
1	0,1201(25)	0,0318(15)	0,0646(11)	0,2166(31)	-0,0006(12)	-0,0003(6)
2	0,1176(25)	0,0178(8)	0,0144(3)	0,1497(27)	-0,0008(15)	-0,0015(30)
3	0,1169(26)	0,0101(5)	0,0042(1)	0,1312(27)	-0,0017(33)	-0,0034(68)
4	0,1177(27)	0,0058(3)	0,0014(0)	0,1249(27)	-0,0033(66)	-0,0070(141)

Tabelle 2.5: Führende experimentelle Momente zur Bestimmung der Charmmasse in GeV^{-2n} . Die zweite bis vierte Spalte zeigt jeweils den Beitrag aus Resonanz-, Schwellen- und Kontinuumsregion. In der fünften Spalte ist der Gesamtwert $\mathcal{M}_n^{\text{exp}}$ angegeben. Die letzten beiden Spalten enthalten den nichtperturbativen Beitrag gemäß Gl. (2.58) unter Berücksichtigung des Wilsonkoeffizienten zur führenden Ordnung bzw. zur Ordnung α_s .

n	$m_c(3 \text{ GeV})$	exp	α_s	μ	np[LO]	gesamt
1	986	9	9	2	2	13
2	974	6	14	5	3	17
3	974	5	15	7	6	18
4	997	3	9	31	8	33

Tabelle 2.6: Aus experimentellen Daten bestimmte Charmmassen in MeV bei der Skala $\mu = 3 \text{ GeV}$. Gezeigt werden die Ergebnisse für die Momente C_n bzw. $\mathcal{M}_n^{\text{exp}}$ mit $n = 1, 2, 3, 4$ und ihr jeweiliger Fehler. Der Gesamtfehler setzt sich zusammen aus experimentellem Fehler, Unsicherheit in α_s , Variation der Skala μ und einer Abschätzung der unbekannten nichtperturbativen Beiträge. In dieser Tabelle sind diese Beiträge über das Gluonkondensat und seinen Wilsonkoeffizienten in führender Ordnung abgeschätzt.

n	$m_c(3 \text{ GeV})$	exp	α_s	μ	np[NLO]	gesamt
1	985	9	9	2	3	13
2	973	6	14	5	7	18
3	971	4	15	7	11	20
4	992	3	8	31	17	37

Tabelle 2.7: Aus experimentellen Daten bestimmte Charmmassen in MeV bei der Skala $\mu = 3 \text{ GeV}$. Für diese Tabelle wurde in der Abschätzung der nichtperturbativen Beiträge der Wilsonkoeffizienten des Gluonkondensats zur Ordnung α_s eingesetzt.

n	$\mathcal{M}_n^{\text{res}}$ $\times 10^{(2n+1)}$	$\mathcal{M}_n^{\text{thr}}$ $\times 10^{(2n+1)}$	$\mathcal{M}_n^{\text{con}}$ $\times 10^{(2n+1)}$	$\mathcal{M}_n^{\text{exp}}$ $\times 10^{(2n+1)}$
1	1,394(23)	0,287(12)	2,911(18)	4,592(31)
2	1,459(23)	0,240(10)	1,173(11)	2,872(28)
3	1,538(24)	0,200(8)	0,624(7)	2,362(26)
4	1,630(25)	0,168(7)	0,372(5)	2,170(26)

Tabelle 2.8: Führende experimentelle Momente zur Bestimmung der Bottommasse in GeV^{-2n} . Die zweite bis vierte Spalte zeigt jeweils den Beitrag aus Resonanz-, Schwellen- und Kontinuumsregion. In der letzten Spalte ist der Gesamtwert $\mathcal{M}_n^{\text{exp}}$ angegeben.

n	$m_b(10 \text{ GeV})$	$m_b(m_b)$	exp	α_s	μ	gesamt
1	3597	4151	14	7	2	16
2	3610	4163	10	12	3	16
3	3619	4172	8	14	6	18
4	3631	4183	6	15	20	26

Tabelle 2.9: Aus den führenden vier theoretischen und experimentellen Momenten bestimmte Bottommassen in MeV. Die Fehlerquellen sind die gleichen wie für die Charmmassen (siehe Tabelle 2.6); der nichtperturbative Beitrag und damit auch der Fehler sind jedoch in diesem Fall vernachlässigbar klein.

dem ersten Moment extrahierte Masse $m_c(3 \text{ GeV}) = 986(13) \text{ MeV}$ auf. Für die Masse des Bottomquarks ist die Übereinstimmung etwas weniger gut, die unterschiedlichen Ergebnisse sind aber weiterhin im Rahmen der Fehlerabschätzung miteinander verträglich. Hier sind die Fehler der ersten drei Momente vergleichbar groß; der Wert $m_b(m_b) = 4163(16) \text{ MeV}$ liegt nahe am Mittelwert der drei Bestimmungen und erhält einen hinreichend großen Beitrag aus der Resonanz- und der Schwellenregion (siehe Abschnitt 2.2). Insgesamt ergeben sich also

$$\begin{aligned} m_c(3 \text{ GeV}) &= 986(13) \text{ MeV} , \\ m_b(m_b) &= 4163(16) \text{ MeV} , \\ m_b(10 \text{ GeV}) &= 3610(16) \text{ MeV} . \end{aligned} \tag{2.59}$$

Oberhalb der Bottomschwelle zeigt sich, dass die in der Kontinuumsregion $\sqrt{s} \geq 11,24 \text{ GeV}$ verwendete theoretische Vorhersage etwas größere Werte für das R -Verhältnis ergibt, als anhand der Daten erwartet. Aus diesem Grund wird im Folgenden die Möglichkeit diskutiert, dass Störungstheorie erst bei höheren Schwerpunktsenergien gültig ist und für eine korrekte Behandlung des Bereichs unmittelbar oberhalb der Schwelle weitere Messdaten benötigt werden.

Nach dieser Vermutung würden weitere Daten zunächst ein Anwachsen des R -Verhältnisses bis zu dem Punkt zeigen, ab dem Störungstheorie verlässlich wird. Um ein solches Verhalten qualitativ zu verstehen, können verschiedene Interpolationen zwischen den Messdaten und der theoretischen Vorhersage bei einer höheren Energieskala betrachtet werden. Ein denkbarer Übergang zwischen Schwellen- und Kontinuumsregion ist in Abbildung 2.23 dargestellt. Hier wurde zwischen den Messdaten bis $11,2026 \text{ GeV}$ und den Theoriewerten ab 13 GeV linear interpoliert. Die sich ergebenden Änderungen für die Momente $\mathcal{M}_n^{\text{exp}}$ und die daraus extrahierten Quarkmassen sind in den Tabellen 2.10 bzw. 2.11 aufgeführt. Im Vergleich zu den in Tabelle 2.9 gezeigten Ergebnissen lässt sich eine Tendenz zu einem höheren Wert für die Bottommasse und eine bessere Übereinstimmung der aus verschiedenen Momenten bestimmten Massen feststellen.

Ein weitere mögliche Ursache für den Unterschied zwischen Theorie und Experiment bestände aus systematisch zu kleinen Werten für das gemessene R -Verhältnis auf Grund eines bislang unerkannten Fehlers in den experimentellen Daten. Dieser Fehler ließe sich durch eine Reskalierung der Daten eliminieren. Um eine Übereinstimmung der Theorievorhersage bei einer Schwerpunktsenergie $\sqrt{s} = 11,2 \text{ GeV}$ mit dem Mittelwert der experimentellen Daten zwischen $\sqrt{s} = 11,1 \text{ GeV}$ und $\sqrt{s} = 11,2 \text{ GeV}$ zu erzielen, können beispielsweise die Messwerte mit einem Faktor 1,21 multipliziert werden. In diesem Szenario ergeben sich die in Tabelle 2.12 gezeigten experimentellen Momente und daraus die in Tabelle 2.13 aufgeführten Werte für die Bottommassen. Es ergeben sich generell kleinere Werte für die Massen; darüber hinaus weichen die aus den höheren Momenten gewonnenen Werte merklich von denen aus den führenden Momenten ab.

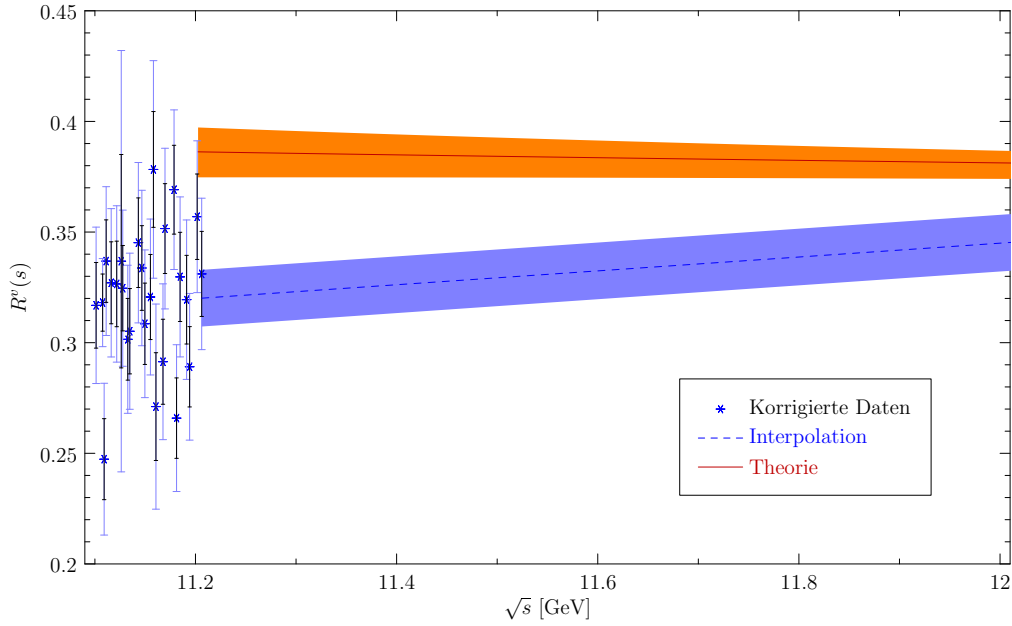


Abbildung 2.23: Mögliches Modell für die Interpolation zwischen Messdaten und Störungstheorie. Zwischen $\sqrt{s_0} = 11,2026 \text{ GeV}$ und $\sqrt{s_1} = 13 \text{ GeV}$ wird linear interpoliert, wobei für $R^v(s_0) = 0,320$ der Mittelwert der Daten oberhalb von $11,1 \text{ GeV}$ verwendet wird. Der Wert bei s_1 ist durch die Theorievorhersage $R^v(s_1) = 0,377$ gegeben. Die schraffierten Bereiche zeigen jeweils den Fehler der Daten bzw. der störungstheoretischen Rechnung an.

n	$\mathcal{M}_n^{\text{res}}$ $\times 10^{(2n+1)}$	$\mathcal{M}_n^{\text{thr}}$ $\times 10^{(2n+1)}$	$\mathcal{M}_n^{\text{con}}$ $\times 10^{(2n+1)}$	$\mathcal{M}_n^{\text{exp}}$ $\times 10^{(2n+1)}$
1	1,394(23)	0,270(11)	2,854(17)	4,518(31)
2	1,459(23)	0,226(9)	1,133(11)	2,819(27)
3	1,538(24)	0,190(8)	0,596(8)	2,324(26)
4	1,630(25)	0,159(6)	0,353(5)	2,142(26)

Tabelle 2.10: Führende experimentelle Momente zur Bestimmung der Bottommasse in GeV^{-2n} für eine lineare Interpolation zwischen $R^v((11,2062 \text{ GeV})^2) = 0,320$ und $R^v((13 \text{ GeV})^2) = 0,377$.

n	$m_b(10 \text{ GeV})$	$m_b(m_b)$	exp	α_s	μ	gesamt
1	3631	4183	14	7	2	16
2	3630	4182	10	12	3	16
3	3631	4183	8	14	6	18
4	3637	4189	7	15	20	26

Tabelle 2.11: Aus den führenden vier theoretischen und experimentellen Momenten bestimmte Bottommassen in MeV für eine lineare Interpolation zwischen $R^v((11,2062 \text{ GeV})^2) = 0,320$ und $R^v((13 \text{ GeV})^2) = 0,376$.

n	$\mathcal{M}_n^{\text{res}}$ $\times 10^{(2n+1)}$	$\mathcal{M}_n^{\text{thr}}$ $\times 10^{(2n+1)}$	$\mathcal{M}_n^{\text{con}}$ $\times 10^{(2n+1)}$	$\mathcal{M}_n^{\text{exp}}$ $\times 10^{(2n+1)}$
1	1,394(23)	0,347(14)	2,911(17)	4,651(32)
2	1,459(23)	0,290(12)	1,173(11)	2,921(28)
3	1,538(24)	0,242(10)	0,624(7)	2,404(27)
4	1,630(25)	0,203(8)	0,372(5)	2,205(27)

Tabelle 2.12: Führende experimentelle Momente zur Bestimmung der Bottommasse für mit einem Faktor 1,21 reskalierte experimentelle Daten.

n	$m_b(10 \text{ GeV})$	$m_b(m_b)$	exp	α_s	μ	gesamt
1	3570	4124	15	8	2	17
2	3592	4146	10	12	3	16
3	3607	4160	8	14	6	18
4	3622	4175	6	15	20	26

Tabelle 2.13: Aus den führenden vier theoretischen und experimentellen Momenten bestimmte Bottommassen in MeV für mit einem Faktor 1,21 reskalierte experimentelle Daten.

2.4.2 Massen aus Gittersimulationen

Anstelle experimenteller Momente können zur Bestimmung der Charm- und der Bottommasse auch aus Gitterrechnungen stammende Momente beliebiger Stromkorrelatoren verwendet werden [11, 12]. Ausgangspunkte sind die Gittermomente

$$G_n = \sum_X T^n \langle \mathcal{J}(X) \mathcal{J}^\dagger(0) \rangle \quad (2.60)$$

mit beliebigen Strömen \mathcal{J} . Die Summation wird über alle Punkte X des euklidischen Raum-Zeit-Gitters ausgeführt; $T = X_0 = i t$ entspricht der euklidischen Zeit.

Üblicherweise müssen die Ergebnisse von Gittersimulationen für den Vergleich mit störungstheoretischen Resultaten geeignet renormiert werden (siehe auch Kapitel 3). Falls der Strom \mathcal{J} in Gl. (2.60) jedoch auf dem Gitter erhalten ist, wird keine Renormierung benötigt und die $\overline{\text{MS}}$ -Massen der Quarks können direkt aus dem Vergleich mit Kontinuumsmomenten bestimmt werden. Andernfalls lässt sich die Abhängigkeit von der Renormierungskonstanten durch eine geeignete Redefinition der Momente eliminieren [11].

Die bislang präzisesten Ergebnisse stammen von den Korrelatoren pseudoskalarer Ströme. Die in [12] durch einen Fit der Gittermomente an die störungstheoretischen Momente bestimmten Massen für Charm- und Bottomquarks sind

$$\begin{aligned} m_c(3 \text{ GeV}) &= 986(6) \text{ MeV} , \\ m_b(m_b) &= 4164(23) \text{ MeV} , \\ m_b(10 \text{ GeV}) &= 3617(25) \text{ MeV} . \end{aligned} \quad (2.61)$$

Diese Werte zeigen eine bemerkenswerte Übereinstimmung mit den bereits in Gl. (2.59) aufgeführten Ergebnissen aus experimentellen Daten.

2.5 Zusammenfassung

Aus den Niederenergiemomenten der Korrelatoren schwerer Quarkströme lassen sich die Massen von Charm- und Bottomquarks mit sehr hoher Genauigkeit bestimmen. Hierfür werden theoretisch berechnete Momente mit experimentell gemessenen oder durch Gittersimulationen bestimmten verglichen.

Auf experimenteller Seite werden Messdaten zum R -Verhältnis in der Nähe der Produktionsschwellen der Quarks verwendet. In der hier vorgestellten Analyse wurden neue Daten des BaBar-Experiments im Bereich der Bottomschwelle für die Massenbestimmungen aufbereitet, wobei die Abstrahlung weicher Photonen und Korrekturen durch die Vakuumpolarisation berücksichtigt wurden.

Um die Präzision der Messungen bzw. der Gittersimulationen zu erreichen, müssen auf theoretischer Seite Korrekturen höherer Ordnung zu den Momenten der Stromkorrelatoren berechnet werden. Die Berechnung auf Vierschleifenniveau mit Hilfe der Laporta-Methode ist sehr aufwändig und kann zur Zeit nur für die führenden Momente durchgeführt werden. Höhere Momente können durch ein auf Padé-Approximation basierendes Näherungsverfahren abgeschätzt werden. Auf Dreischleifenniveau ist es durch Kombination des Laporta-Verfahrens mit Differentialgleichungen möglich, auch sehr hohe Momente exakt zu bestimmen.

In dieser Arbeit wurden die Vierschleifenkorrekturen zu den führenden drei bzw. vier Momenten der diagonalen Korrelatoren berechnet und die Beiträge zu höheren Momenten abgeschätzt. Für die nichtdiagonalen Korrelatoren wurden jeweils 30 Terme in der Nieder- und der Hochenergieentwicklung bis zur Dreischleifenordnung bestimmt.

Aus den Niederenergiemomenten lassen sich die Charm- und Bottommassen mit einer Unsicherheit von etwa 10 bzw. 20 MeV bestimmen. Die Ergebnisse aus dem Vergleich mit experimentellen Daten stimmen dabei außerordentlich gut mit denen aus der Bestimmung über Gitter-QCD überein.

Kapitel 3

Stromkorrelatoren im Ortsraum

Die Grundlagen der theoretischen Teilchenphysik, d.h. die zugrunde liegenden Eichtheorien und ihre Langrangedichten, werden üblicherweise im Ortsraum formuliert. Hingegen werden praktische Störungsrechnungen fast immer im Impulsraum durchgeführt. Hierfür gibt es gute Gründe: Lorentzinvarianz lässt sich im Ortsraum nur schwer unmittelbar ausnutzen; im Impulsraum hingegen führt die aus dieser Symmetrie folgende Erhaltung des Viererimpulses direkt zu erheblichen Vereinfachungen. Zudem werden für den Vergleich mit Messdaten aus Beschleunigerexperimenten üblicherweise ohnehin Impulsraumergebnisse benötigt.

Dennoch kann es in einigen Fällen sehr hilfreich sein, Greensche Funktionen im Ortsraum zu betrachten. Eine spezielle Klasse von so genannten „sun rise“-Diagrammen weist beispielsweise eine verhältnismäßig einfache Struktur auf [93]; in anderen Fällen führt das Auftreten so genannter Kontaktterme zu einem einfacheren Zugang zu höheren Ordnungen der Störungstheorie [94, 95]. Die Ortsdarstellungen Greenscher Funktionen sind vor Allem im Vergleich mit Resultaten aus Gitterrechnungen nützlich: Gittersimulationen verwenden im Gegensatz zu perturbativen Rechnungen zunächst Felder im Ortsraum und führen eine (diskrete) Fourier-Transformation durch, um Impulsraumergebnisse zu erhalten. Andererseits ist es aber natürlich ebenso möglich, die Ergebnisse störungstheoretischer Rechnungen in ihre Ortsdarstellung zu überführen.

In diesem Kapitel soll die in [96] durchgeführte Transformation von Impulsraumergebnissen in den Ortsraum für Korrelatoren verschiedener Quarkströme diskutiert werden. Eine Anwendung der Resultate ist die Umrechnung von Gitterergebnissen im so genannten „X-space“-Schema in das gebräuchlichere $\overline{\text{MS}}$ -Schema.

3.1 Konventionen

Die Definitionen der Stromkorrelatoren im Impulsraum sind in Abschnitt 1.2 aufgeführt. Für den Vergleich mit Gitterrechnungen ist es allerdings sinnvoll, im Folgenden von der „physikalischen“ Minkowskimetrik zur euklidischen Metrik überzugehen. Euklidische Impuls- und Ortsvektoren werden durch Großbuchstaben dargestellt, d.h. durch $Q^2 = -q^2$ und $X^2 = -x^2$. Damit ergibt sich folgende Form für die Korrelatoren im euklidischen Ortsraum:

$$\begin{aligned}\Pi_1^s(X) &= \langle j^s(X) j^s(0) \rangle, & \Pi_1^p(X) &= \langle j^p(X) j^p(0) \rangle, \\ \Pi_{\mu\nu}^v(X) &= \langle j_\mu^v(X) j_\nu^v(0) \rangle, & \Pi_{\mu\nu}^a(X) &= \langle j_\mu^a(X) j_\nu^a(0) \rangle, \\ \Pi_{\mu\nu\rho\sigma}^t(X) &= \langle j_{\mu\nu}^t(X) j_{\rho\sigma}^t(0) \rangle.\end{aligned}\tag{3.1}$$

In diesem Kapitel werden die Korrelatoren im Grenzfall masseloser Quarks betrachtet und Singulettbeiträge vernachlässigt. Damit sind der pseudoskalare und der Axialvektorkorrelator jeweils identisch zum skalaren bzw. zum Vektorkorrelator.

3.2 Fourier-Transformation

3.2.1 Fourier-Transformation in d Dimensionen

Da in der Störungstheorie Greensche Funktionen üblicherweise in dimensionaler Regularisierung berechnet werden, sollte eine damit konsistente Fourier-Transformation ebenfalls in $d = 4 - 2\epsilon$ Dimensionen definiert werden.

Beim Übergang zum Ortsraum müssen verschiedene Funktionen transformiert werden. Die einfachste Abhängigkeit vom äußeren Impuls weist der nackte skalare Korrelator auf. Die Beiträge aus verschiedenen Ordnungen sind je proportional zu $(Q^2)^{1-l\epsilon}$, wobei l der Zahl der Schleifen in den für die jeweilige Ordnung relevanten Diagrammen entspricht. Es ist sinnvoll, den etwas allgemeineren Fall von beliebigen Potenzen r von Q^2 zu betrachten. Hier erhält man

$$\mathcal{F}((Q^2)^r) \equiv \int \frac{d^d Q}{(2\pi)^d} e^{iQX} (Q^2)^r = \frac{1}{(4\pi)^{\frac{d}{2}}} \frac{\Gamma(r + \frac{d}{2})}{\Gamma(-r)} \left(\frac{4}{X^2} \right)^{r + \frac{d}{2}}\tag{3.2}$$

für die Fouriertransformierte (für eine Herleitung siehe Anhang C.1). Es ist zu beachten, dass die Transformationsformel nur für „reguläre“ Werte von X gilt; der Limes $X \rightarrow 0$ erfordert beispielsweise eine weiter gehende Betrachtung (siehe auch [94, 95]).

Bei den Korrelatoren im masselosen Limes und in vielen weiteren Fällen haben die auftretenden Exponenten von Q^2 die Form $r = z - n\epsilon$ mit ganzzahligen

z und ganzzahligen nichtnegativen n . Für diese Fälle zeigt die Fouriertransformierte einige bemerkenswerte Eigenschaften: Für $z \leq -2$ ist sie im Limes $d \rightarrow 4$ divergent. Dieser Fall tritt beispielsweise in der Operatorproduktentwicklung der Gluon- und Quarkpropagatoren auf [94, 95]. Dort werden die zusätzlichen Pole aus der Fourier-Transformation durch Pole aus der Renormierung von so genannten Kontakttermen aufgehoben, die nur im Ortsraum beitragen. Bei den vorliegenden Korrelatoren tritt ein anderer Spezialfall ein: Da $z \geq 0$ gilt, ist die Fouriertransformierte proportional zu ϵ ; für $n = 0$ verschwindet sie sogar identisch. Somit genügt die Kenntnis des divergenten Anteils des Impulsraumergebnisses um das vollständige Ortsraumergebnis zu erhalten.

3.2.2 Nichttriviale Lorentzstrukturen

Zusätzlich zu einfachen Potenzen von Q^2 treten bei den Korrelatoren von Vektor- und Tensorströmen auch einzelne Komponenten Q_μ des Impulsvektors auf. Hier ist es für die Fourier-Transformation hilfreich, die Impulse durch Ableitungen auszudrücken:

$$Q_\mu \rightarrow -i \frac{\partial}{\partial X_\mu}, \quad (3.3)$$

$$\mathcal{F} \left(\frac{Q_\mu Q_\nu}{Q^2} (Q^2)^r \right) = \frac{1}{(4\pi)^{\frac{d}{2}}} \frac{\Gamma(\frac{d}{2} + r)}{\Gamma(-r)} \left(\frac{4}{X^2} \right)^{r+\frac{d}{2}} \left[-\frac{\delta_{\mu\nu}}{2r} + \left(1 + \frac{d}{2r} \right) \frac{X_\mu X_\nu}{X^2} \right]. \quad (3.4)$$

Offensichtlich muss die Transversalität des Vektorstroms unter der Transformation erhalten bleiben. Dementsprechend ergibt eine explizite Rechnung

$$\begin{aligned} \mathcal{F} \left(\left[\delta_{\mu\nu} - \frac{Q_\mu Q_\nu}{Q^2} \right] (Q^2)^r \right) &= \frac{1}{(4\pi)^{\frac{d}{2}}} \frac{\Gamma(\frac{d}{2} + r)}{\Gamma(-r)} \left(\frac{4}{X^2} \right)^{r+\frac{d}{2}} \\ &\quad \times \left[\left(1 + \frac{1}{2r} \right) \delta_{\mu\nu} - \left(1 + \frac{d}{2r} \right) \frac{X_\mu X_\nu}{X^2} \right], \end{aligned} \quad (3.5)$$

$$\partial_\mu \mathcal{F} \left(\left[\delta_{\mu\nu} - \frac{Q_\mu Q_\nu}{Q^2} \right] (Q^2)^r \right) = \partial_\nu \mathcal{F} \left(\left[\delta_{\mu\nu} - \frac{Q_\mu Q_\nu}{Q^2} \right] (Q^2)^r \right) = 0 \quad (3.6)$$

Im Gegensatz zum Impulsraum ändert sich die Tensorstruktur im Ortsraum also je nach Ordnung der Entwicklung in ϵ , da sich das Verhältnis der Koeffizienten von $\delta_{\mu\nu}$ und $X_\mu X_\nu / X^2$ von Ordnung zu Ordnung verändert. Damit folgt direkt aus der Transversalität des Vektorstroms die Tatsache, dass seine Tensorstruktur im Ortsraum durch das Auftreten von Polen in verschiedenen Ordnungen der Störungstheorie nicht einheitlich sein kann. Dies wirkt sich insbesondere auf die Renormierung dieses Korrelators im Ortsraum (siehe Abschnitt 3.3) aus.

3.2.3 Fourier-Transformation renormierter Korrelatoren

Grundsätzlich gibt es zwei unterschiedliche, aber prinzipiell äquivalente Vorgehensweisen um renormierte Korrelatoren im Ortsraum zu erhalten: Zum Einen kann man, wie bisher besprochen, nackte Korrelatoren in d Dimensionen in den Ortsraum transformieren und anschließend renormieren. Zum Anderen ist es aber natürlich auch möglich, die Korrelatoren im Impulsraum zu renormieren und erst danach in den Ortsraum überzugehen. Wenn durch die Fourier-Transformation keine Pole entstehen, d.h. keine zu hohen negativen Potenzen von Q^2 auftreten (siehe Abschnitt 3.2.1), kann sie sogar in vier Dimensionen durchgeführt werden. Dies ist bei den hier behandelten Korrelatoren der Fall.

Betrachtet man in den renormierten Korrelatoren im Impulsraum den Limes $d \rightarrow 4$, so treten zusätzlich zu den bereits besprochenen Strukturen außerdem Logarithmen in Q^2 auf. Diese lassen sich mit Hilfe von Ableitungen wieder über Potenzen ausdrücken, was die Fourier-Transformation auf den bereits aus Gl. (3.2) bekannten Fall zurückführt:

$$\mathcal{F}((Q^2)^r \log^s(Q^2)) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \left(\frac{\partial}{\partial \delta} \right)^s \mathcal{F}((Q^2)^{r+\delta}). \quad (3.7)$$

Bei der Fourier-Transformation der Korrelatoren tragen nur logarithmische Terme bei: Nicht-logarithmische Terme sind entweder proportional zu Q^2 oder zu $Q_\mu Q_\nu$ und verschwinden damit nach Gl. (3.2) bei der Transformation in den Ortsraum:

$$\mathcal{F}(Q^2) = \frac{1}{\Gamma(-1)} = 0, \quad (3.8)$$

$$\mathcal{F}(Q_\mu Q_\nu) = -\partial_\mu \partial_\nu \mathcal{F}(1) = 0. \quad (3.9)$$

Damit genügt der logarithmische Anteil der Impulsraumkorrelatoren um das vollständige entsprechende Ortsraumergebnis zu erhalten. Dies bedeutet unter Anderem, dass die Kenntnis des Vektorkorrelators im Ortsraum äquivalent zur Kenntnis der Adlerfunktion $D(s) = -s \frac{d}{ds} \Pi^v(s)$ ist, da $\Pi^v(s)$ nur logarithmisch von s abhängt.

Die logarithmischen Anteile des skalaren und des Vektorkorrelators wurden in [68,97] zur Bestimmung der R -Verhältnisse bis zur Ordnung α_s^4 berechnet; hieraus erhält man somit die entsprechenden Ortsraumkorrelatoren komplett bis zur selben Ordnung. Für den Fall des Tensorkorrelator ist immerhin die logarithmische α_s^3 -Korrektur bekannt [96], die speziell für die hier beschriebene Transformation in den Ortsraum bestimmt wurde.

3.3 Renormierung im Ortsraum

Die Renormierung im Ortsraum verläuft im Prinzip analog zur üblichen Renormierung im Impulsraum. Es ist allerdings zu beachten, dass einige Renormierungsschemata – insbesondere solche, deren Renormierungsbedingungen sich auf spezielle Impulskonfigurationen beziehen – nicht sehr geeignet für die Renormierung im Ortsraum sind.

In diesem Abschnitt sollen zwei speziell auf die Renormierung im Ortsraum zugeschnittene Schemata beschrieben werden. Zunächst werden das $\overline{\text{MS}}$ -Schema und mögliche Modifikationen betrachtet. Anschließend wird ein Schema für die Renormierung von Gitterresultaten, das „X-space“-Schema vorgestellt. Schließlich wird als Anwendung die Umrechnung von im „X-space“-Schema renormierten Gitterkorrelatoren in $\overline{\text{MS}}$ -artige Schemata diskutiert.

3.3.1 $\overline{\text{MS}}$ -artige Schemata

$\overline{\text{MS}}$ -artige Schemata, insbesondere das $\overline{\text{MS}}$ -Schema, sind die wohl am weitesten verbreiteten Renormierungsschemata in perturbativer QCD und bieten sich auf Grund der einfachen Renormierungsbedingungen und der zu erwartenden guten Konvergenz der Störungsreihe ebenfalls für die Renormierung im Ortsraum an. Im Impulsraum wird fast ausschließlich das $\overline{\text{MS}}$ -Schema verwendet, das sich gegenüber dem traditionellen MS -Schema durch eine einfachere Struktur der auftretenden Logarithmen auszeichnet. Um ein entsprechendes Schema für den Ortsraum zu finden, soll hier analog zum Vorgehen im Impulsraum ebenfalls die logarithmische Struktur analysiert werden.

Im ursprünglichen MS -Schema werden die im Impulsraum auftretenden Logarithmen durch die Entwicklung der folgenden Terme in ϵ verursacht:

$$\left(\frac{4\pi\mu^2}{Q^2} e^{-\gamma_E} \right)^{l\epsilon} \longrightarrow 1 + l\epsilon \left[\log \left(\frac{4\pi\mu^2}{Q^2} \right) - \gamma_E \right] + \mathcal{O}(\epsilon^2). \quad (3.10)$$

Dabei entspricht l wieder der Anzahl der Schleifen im jeweils beitragenden Diagramm. Durch Reskalierung der 't Hooft-Masse $\mu^2 \rightarrow \mu^2/(4\pi)e^{\gamma_E}$ lassen sich diese Terme in eine deutlich einfachere Form bringen:

$$\left(\frac{\mu^2}{Q^2} \right)^{l\epsilon} \longrightarrow 1 + l\epsilon \log \left(\frac{\mu^2}{Q^2} \right) + \mathcal{O}(\epsilon^2). \quad (3.11)$$

Diese Wahl von μ definiert das $\overline{\text{MS}}$ -Schema¹.

¹Es gibt eine Reihe weiterer Möglichkeiten das $\overline{\text{MS}}$ -Schema zu definieren, z.B. durch eine Redefinition des d -dimensionalen Integrationsmaßes. Zudem unterscheiden sich verschiedene Definitionen zum Teil in höheren Ordnungen der Entwicklung in ϵ . Diese Details sind für die vorliegende Diskussion nicht weiter relevant.

Eine Möglichkeit die logarithmische Struktur im Ortsraum zu untersuchen besteht darin, aus der Fouriertransformierten der linken Seite von Gl. (3.10) alle Terme der Form y^{l_ϵ} zu extrahieren. Aus der Entwicklung der Γ -Funktionen erhält man dabei je einen Faktor $e^{-\gamma_E}$. Damit ergibt sich für das $\overline{\text{MS}}$ -Schema

$$(\pi\mu^2 X^2 e^{\gamma_E})^{l_\epsilon} \longrightarrow 1 + l_\epsilon [\log(\pi\mu^2 X^2) + \gamma_E] + \mathcal{O}(\epsilon^2) \quad (3.12)$$

und entsprechend für das $\overline{\text{MS}}$ -Schema

$$\left(\frac{\mu^2 X^2}{4} e^{2\gamma_E}\right)^{l_\epsilon} \longrightarrow 1 + l_\epsilon \left[\log\left(\frac{\mu^2 X^2}{4}\right) + 2\gamma_E \right] + \mathcal{O}(\epsilon^2). \quad (3.13)$$

Wie man sieht, treten in beiden Fällen komplizierte Logarithmen auf. Die Logarithmen lassen sich wieder durch eine geeignete Redefinition von μ vereinfachen. Dies definiert das $\widetilde{\text{MS}}$ -Schema, in dem die Terme die Form

$$(\mu^2 X^2)^{l_\epsilon} \longrightarrow 1 + l_\epsilon \log(\mu^2 X^2) + \mathcal{O}(\epsilon^2) \quad (3.14)$$

annehmen. Im $\widetilde{\text{MS}}$ -Schema angegebene Ergebnisse lassen sich natürlich sehr einfach durch die Ersetzung $\mu \rightarrow 2e^{\gamma_E} \mu$ in $\overline{\text{MS}}$ -Ergebnisse umrechnen; insbesondere gilt für die starke Kopplung

$$\tilde{a}_s(\mu) = a_s(2e^{-\gamma_E} \mu) \approx a_s(1,12\mu) \quad (3.15)$$

und damit

$$\begin{aligned} \tilde{a}_s(\mu) = a_s(\mu) & \left\{ 1 - a_s(\mu)L\beta_0 + a_s^2(\mu)L(\beta_0^2 L - \beta_1) \right. \\ & + a_s^3(\mu)L \left(-\beta_0^3 L^2 + \frac{5}{2}\beta_0\beta_1 L - \beta_2 \right) \\ & + a_s^4(\mu)L \left[\beta_0^4 L^3 - \frac{13}{3}\beta_0^2\beta_1 L^2 + 3 \left(\frac{\beta_1^2}{2} + \beta_0\beta_2 \right) L - \beta_3 \right] \\ & \left. + \mathcal{O}(a_s^5 L^5) \right\} \end{aligned} \quad (3.16)$$

mit $L = 2(\log(2) - \gamma_E)$ und den in Anhang D.2 angegebenen Koeffizienten der β -Funktion. Die im $\widetilde{\text{MS}}$ -Schema renormierten Ortsraumkorrelatoren sind im Anhang C.2 aufgeführt.

3.3.2 Gitterrenormierung

Eine der Hauptmotivationen für die Bestimmung Greenscher Funktionen im Ortsraum ist der Vergleich mit den Ergebnissen aus Gittersimulationen. Im Gegensatz zur in Störungsrechnungen üblichen dimensional Regularisierung dienen bei Gitterrechnungen der Gitterabstand und das endliche Gittervolumen als

Regulator für ultraviolette bzw. infrarote Divergenzen. Die Renormierungsbedingungen in MS-artigen Schemata sind eng mit der dimensional Regularisierung verknüpft und können daher bei der Renormierung von Gitterergebnissen nicht direkt erfüllt werden. Um dennoch schließlich MS-renormierte Ergebnisse aus Gittersimulationen zu erhalten, ist es deshalb nötig Schemata einzuführen, deren Renormierungsbedingungen sowohl für Gitterrechnungen als auch für Störungsrechnungen im Kontinuum geeignet sind. Da Gittersimulationen und perturbative Kontinuumsrechnungen wie erwähnt üblicherweise unterschiedliche Regulatoren verwenden, ist es sinnvoll, sich in den Renormierungsbedingungen entsprechender Schemata nicht ausdrücklich auf einen Regulator zu beziehen. Ergebnisse aus diesen „Hilfs-Schemata“ können dann nach störungstheoretischer Bestimmung der Umrechnungsfaktoren in MS-Ergebnisse umgerechnet werden.

Im Impulsraum ist seit langer Zeit mit den MOM-Schemata eine ganze Familie solcher Renormierungsschemata bekannt. Die gemeinsame Eigenschaft der Renormierungsbedingungen der MOM-Schemata ist die Festlegung von Greenschen Funktionen mit einer bestimmten Impulskonfiguration auf eine Konstante, beispielsweise auf den Wert dieser Greenschen Funktion in der freien Theorie. Die Umrechnungsfaktoren aus den praktisch relevantesten MOM-Schemata in das $\overline{\text{MS}}$ -Schema sind wohlbekannt [98–101].

Ein entsprechendes Schema für die Renormierung von Stromkorrelatoren im Ortsraum wurde in [102] vorgeschlagen. Dabei werden als Renormierungsbedingung die Korrelatoren bei einem Abstand X_0 auf ihren Wert in der freien Theorie festgelegt:

$$\Pi_X^\delta(X) \Big|_{X=X_0} = (Z_X^\delta)^2 \Pi_0^\delta(X_0) \equiv \Pi_{\text{free}}^\delta(X_0), \quad \delta \in \{v, s, t\}. \quad (3.17)$$

Der Wert in der freien Theorie entspricht dabei gerade dem Beitrag in führender Ordnung Störungstheorie. Für die Renormierung des Vektorstromkorrelators muss diese Definition erweitert werden, da sich – wie in Abschnitt 3.2.2 erläutert – die Lorentzstruktur dieses Korrelators in höheren Ordnungen der Störungstheorie ändert. Im Folgenden wird deshalb stets die Spur des Vektorstromkorrelators betrachtet.

Die Umrechnung in das $\overline{\text{MS}}$ -Schema erhält man aus der Definition (3.17) durch Ersetzen des nackten Korrelators Π_0^δ durch sein $\overline{\text{MS}}$ -Äquivalent:

$$\Pi_0^\delta(X_0) = (\tilde{Z}^\delta(\mu))^{-2} \tilde{\Pi}^\delta(X_0, \mu). \quad (3.18)$$

Damit ergibt sich für den Umrechnungsfaktor

$$\frac{\tilde{Z}^\delta(\mu)}{Z_X^\delta} = \sqrt{\frac{\tilde{\Pi}^\delta(X_0, \mu)}{\Pi_{\text{free}}^\delta(X_0)}}, \quad (3.19)$$

d.h. für den Übergang zwischen den Schemata genügt die Kenntnis des entsprechenden $\overline{\text{MS}}$ Korrelators im Ortsraum, der sich durch Fourier-Transformation direkt aus dem bekannten Impulsraumergebnis ergibt.

Im Sinne einer besseren Lesbarkeit sind die Ergebnisse für die Übergangsfaktoren im $\overline{\text{MS}}$ -Schema bei der Skala $\mu_0^2 = 1/X_0^2$ angegeben. Mithilfe der Renormierungsgruppenentwicklung der Renormierungskonstanten im $\overline{\text{MS}}$ -Schema ergeben sich daraus die Umrechnungsfaktoren für beliebige μ :

$$\frac{\tilde{Z}^\delta(\mu)}{Z_X^\delta(X_0^2)} = \exp \left(\int_{\tilde{a}_s(\mu_0)}^{\tilde{a}_s(\mu)} \frac{dz}{z} \frac{\gamma^\delta(z)}{\beta(z)} \right) \frac{\tilde{Z}^\delta(\mu_0)}{Z_X^\delta(X_0^2)}. \quad (3.20)$$

Die hierfür benötigten anomalen Dimensionen finden sich in Anhang D.2; die Umrechnung in das $\overline{\text{MS}}$ -Schema kann mit den Gleichungen (3.15) bzw. (3.16) durchgeführt werden.

Für die einzelnen Korrelatoren erhält man

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{Z}^s(\tilde{\mu}_0)}{Z_X^s} &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \delta^{(n),s} \tilde{a}_s(\tilde{\mu}_0)^n, \\ \delta^{(1),s} &= \frac{1}{3}, \\ \delta^{(2),s} &= \frac{89}{32} - \frac{39}{4} \zeta_3 + n_l \left(-\frac{23}{144} + \frac{1}{3} \zeta_3 \right), \\ \delta^{(3),s} &= \frac{140741}{10368} - \frac{2387}{54} \zeta_3 + \frac{815}{24} \zeta_5 + n_l \left(-\frac{12947}{7776} + \frac{19}{72} \zeta_3 - \frac{5}{12} \zeta_4 - \frac{25}{18} \zeta_5 \right) \\ &\quad + n_l^2 \left(-\frac{383}{23328} + \frac{4}{27} \zeta_3 \right), \\ \delta^{(4),s} &= \frac{13901515}{995328} - \frac{4393}{288} \zeta_3 + \frac{208679}{432} \zeta_3^2 + \frac{265}{36} \zeta_4 - \frac{626785}{1728} \zeta_5 \\ &\quad - \frac{1375}{64} \zeta_6 - \frac{178045}{1536} \zeta_7 + n_l \left(-\frac{8029687}{746496} - \frac{418799}{10368} \zeta_3 \right. \\ &\quad \left. - \frac{851}{32} \zeta_3^2 - \frac{6571}{1152} \zeta_4 + \frac{45895}{432} \zeta_5 + \frac{2875}{576} \zeta_6 + \frac{665}{144} \zeta_7 \right) \\ &\quad + n_l^2 \left(-\frac{257315}{4478976} + \frac{11273}{2592} \zeta_3 + \frac{13}{36} \zeta_3^2 + \frac{25}{192} \zeta_4 - \frac{6515}{864} \zeta_5 \right) \\ &\quad + n_l^3 \left(\frac{6653}{1119744} - \frac{173}{2592} \zeta_3 + \frac{1}{288} \zeta_4 + \frac{5}{36} \zeta_5 \right), \end{aligned} \quad (3.21)$$

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{Z}^v(\tilde{\mu}_0)}{Z_X^v} &= (Z_X^v)^{-1} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \delta^{(n),v} \tilde{a}_s(\tilde{\mu}_0)^n, \\ \delta^{(1),v} &= \frac{1}{2}, \\ \delta^{(2),v} &= \frac{97}{24} - \frac{11}{2} \zeta_3 + n_l \left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{3} \zeta_3 \right), \end{aligned}$$

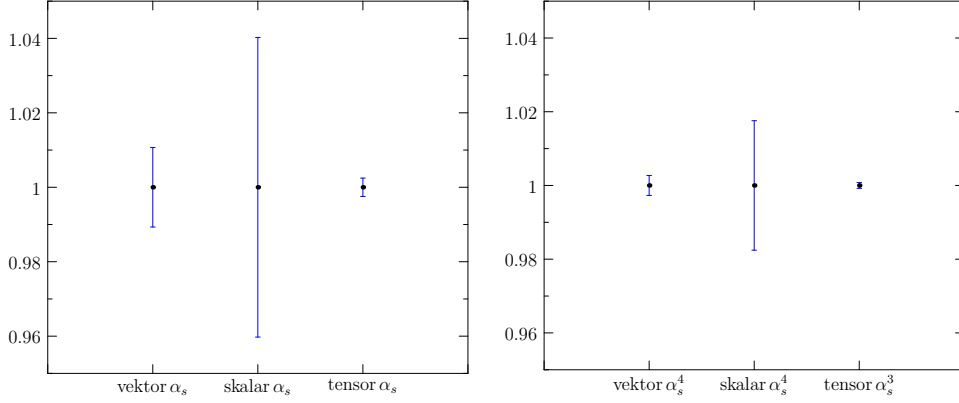


Abbildung 3.1: Relative Fehler der Umrechnungsfaktoren in verschiedenen Ordnungen der Störungstheorie. Auf der linken Seite sind die Fehler der alten Ergebnisse zur Ordnung α_s gezeigt, rechts die der neu berechneten Resultate bis α_s^3 bzw. α_s^4 .

$$\begin{aligned}
 \delta^{(3),v} &= \frac{14881}{288} - \frac{119}{2}\zeta_3 + \frac{275}{12}\zeta_5 + n_l \left(-\frac{5395}{864} + \frac{47}{9}\zeta_3 - \frac{25}{18}\zeta_5 \right) \\
 &\quad + n_l^2 \left(\frac{181}{1296} - \frac{2}{27}\zeta_3 \right), \\
 \delta^{(4),v} &= \frac{34042561}{41472} - \frac{294371}{432}\zeta_3 + \frac{5203}{16}\zeta_3^2 - \frac{212905}{576}\zeta_5 - \frac{7315}{96}\zeta_7 \\
 &\quad + n_l \left(-\frac{6096767}{41472} + \frac{7819}{96}\zeta_3 - \frac{77}{3}\zeta_3^2 + \frac{79775}{864}\zeta_5 + \frac{665}{144}\zeta_7 \right) \\
 &\quad + n_l^2 \left(\frac{889699}{124416} - \frac{2899}{1728}\zeta_3 + \frac{13}{36}\zeta_3^2 - \frac{1415}{216}\zeta_5 \right) \\
 &\quad + n_l^3 \left(-\frac{1037}{11664} - \frac{2}{81}\zeta_3 + \frac{5}{36}\zeta_5 \right), \tag{3.22}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\tilde{Z}^t(\tilde{\mu}_0)}{Z_X^t} &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \delta^{(n),t} \tilde{a}_s(\tilde{\mu}_0)^n, \\
 \delta^{(1),t} &= 1, \\
 \delta^{(2),t} &= \frac{4871}{864} - \frac{143}{36}\zeta_3 + n_l \left(-\frac{443}{1296} + \frac{1}{3}\zeta_3 \right), \\
 \delta^{(3),t} &= \frac{7913369}{93312} - \frac{18529}{243}\zeta_3 + \frac{29}{108}\zeta_4 + \frac{2395}{216}\zeta_5 \\
 &\quad + n_l \left(-\frac{238541}{23328} + \frac{1913}{216}\zeta_3 + \frac{5}{36}\zeta_4 - \frac{25}{18}\zeta_5 \right) + n_l^2 \left(\frac{18287}{69984} - \frac{2}{9}\zeta_3 \right). \tag{3.23}
 \end{aligned}$$

Wie in Abbildung 3.1 zu sehen, führen die neu berechneten höheren Ordnungen gegenüber den alten Ergebnissen bis zur Ordnung $\mathcal{O}(\alpha_s)$ zu einer deutlichen Reduktion des theoretischen Fehlers. Der Fehler kann dadurch abgeschätzt werden,

dass die Konversionsfaktoren in Gl. (3.21) bis (3.23) zunächst bei einer variablen Skala μ mit $\frac{1}{4X_0^2} \leq \mu^2 \leq \frac{4}{X_0^2}$ berechnet und anschließend mit Hilfe der Renormierungsgruppengleichung Gl. (3.20) zur Skala μ_0 entwickelt werden. Die Variation im Endergebnis ist ein Maß für den Fehler durch unbekannte Beiträge höherer Ordnung. In Abbildung 3.2 werden die so bestimmten Fehler in unterschiedlichen Ordnungen der Störungstheorie für den Renormierungspunkt $X_0^2 = (3 \text{ GeV})^{-2}$ und $n_f = 4$ aktive Quarks im Detail gezeigt. In den Ordnungen α_s^2 und α_s^4 zeigen sich große Korrekturen, die häufig sogar außerhalb der Fehlerabschätzungen aus den niedrigeren Ordnungen liegen.

Die hier betrachtete Skala liegt über dem in [96] diskutierten Wert von $\mu_0 = 2 \text{ GeV}$. Dementsprechend zeigt die Störungsreihe in Abbildung 3.2 ein deutlich besseres Verhalten. Andererseits stellt die hier diskutierte Energieskala höhere Anforderungen an die Gittersimulationen – insbesondere an den verwendeten Gitterabstand – und führt somit zu größeren Gitterfehlern.

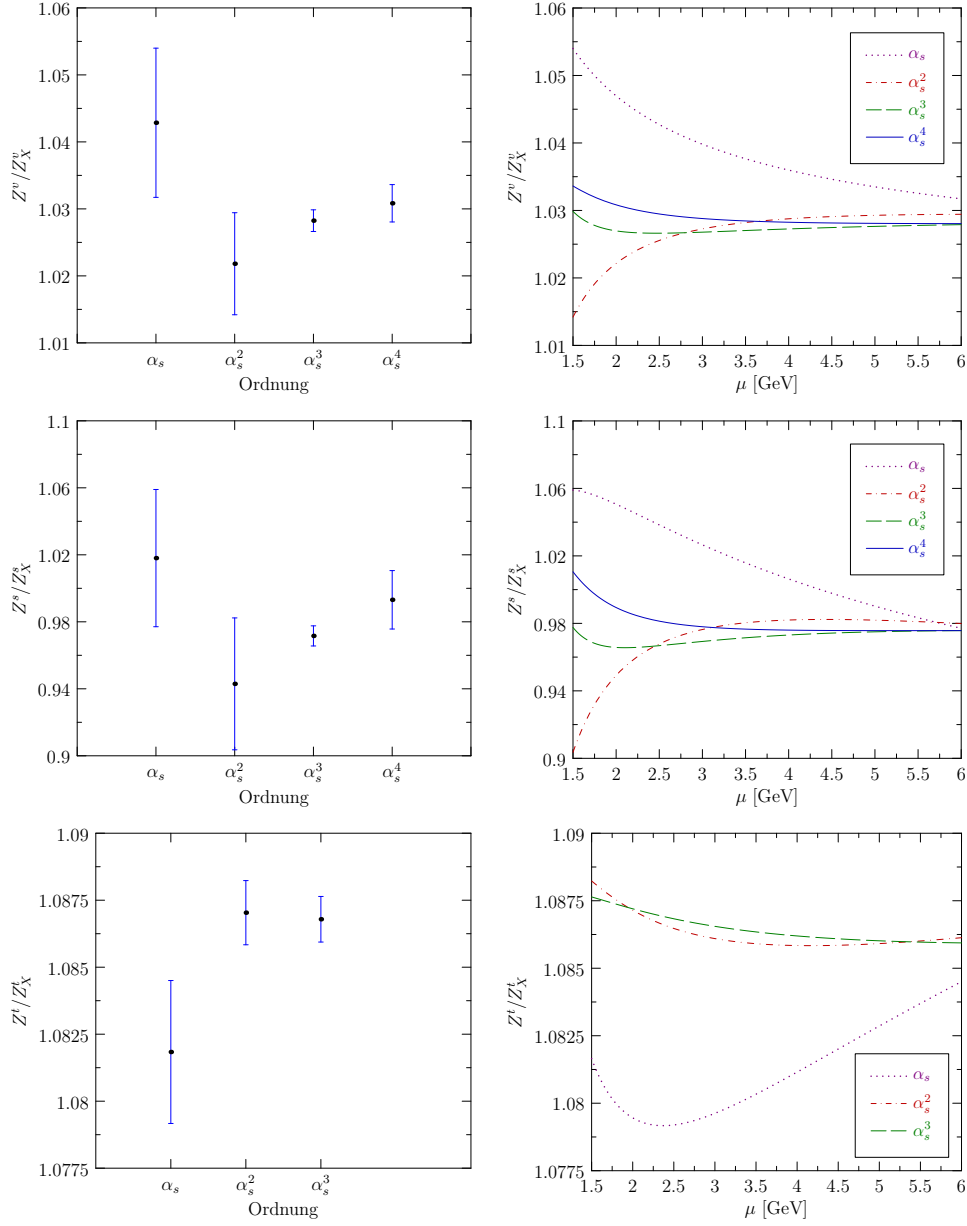


Abbildung 3.2: Ergebnisse und Fehler für die Konversionsfaktoren $\tilde{Z}^\delta(\tilde{\mu}_0)/Z_X^\delta$ mit $\delta \in \{v, s, t\}$ für $\mu_0^2 = 1/X_0^2 = (3 \text{ GeV})^2$ und $n_f = 4$ in verschiedenen Ordnungen der Störungstheorie. Der angegebene Fehler ergibt sich durch Renormierungsgruppenentwicklung von einer variablen Skala μ mit $\frac{1}{4X_0^2} \leq \mu^2 \leq \frac{4}{X_0^2}$ zu μ_0 . Auf der rechten Seite ist jeweils die explizite Abhängigkeit von μ dargestellt.

3.4 Zusammenfassung

Für den Vergleich von Gittersimulationen und Störungsrechnungen ist es oft nötig, Ergebnisse von einem gitterspezifischen Renormierungsschema in das $\overline{\text{MS}}$ -Schema zu konvertieren. Die Umrechnungsfaktoren hierfür können für Stromkorrelatoren im „X-space“-Schema aus bekannten Ergebnissen bis zur Ordnung α_s^3 im Falle von Tensorströmen bzw. bis α_s^4 für andere Lorentzstrukturen bestimmt werden. Zur Berechnung dieser Faktoren werden lediglich die entsprechenden Stromkorrelatoren im Ortsraum benötigt, die sich direkt durch Fourier-Transformation aus den bekannten logarithmischen Anteilen der Impulsraumkorrelatoren gewinnen lassen. Dabei zeigt eine Betrachtung der Eigenschaften der Fourier-Transformation, dass sich die logarithmische Struktur im Ortsraum durch Einführung eines neuen modifizierten MS-Schemas (genannt $\widetilde{\text{MS}}$) deutlich vereinfachen lässt.

Die neuen Ergebnisse für die Umrechnungsformeln reduzieren selbst für kleine Energieskalen im Bereich von 3 GeV den Fehler aus der Konversion gegenüber den alten $\mathcal{O}(\alpha_s)$ -Ergebnissen in [102] um mehr als 50% und stellen somit eine erhebliche Verbesserung dar.

Anhang A

Diagonale Korrelatoren

Im Folgenden werden die in dieser Arbeit relevanten Ergebnisse für die diagonalen Korrelatoren in analytischer Form als Funktionen von $z = q^2/4m_q^2$ angegeben. n_h entspricht der Zahl der schweren Quarks mit Masse m_q , n_l der Zahl der leichten Quarks mit Masse 0. In den Formeln treten folgende Funktionen auf:

$$\begin{aligned}\zeta_n &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^n}, & \text{Li}_n &= \text{Li}_n\left(\frac{1}{2}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k k^n}, \\ c_4 &= 24 \text{Li}_4 + \log^4 2 - 6\zeta_2 \log^2 2, & L_z &= \log(-4z).\end{aligned}\tag{A.1}$$

A.1 Niederenergieentwicklung

Die Niederenergieentwicklung der diagonalen Polarisationsfunktionen lautet

$$\Pi^\delta(z) = \frac{3}{16\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} C_n^\delta z^n.\tag{A.2}$$

Die Momente C_n^δ lassen sich in eine Störungsreihe in $a_s = \alpha_s/\pi$ entwickeln:

$$C_n^\delta \sim \sum_{i=0}^{\infty} C_n^{(i),\delta} a_s^i,\tag{A.3}$$

Die in [22, 24–28] berechneten analytischen Ergebnisse für die führenden 30 Terme bis zur Dreischleifenordnung ($i = 2$) stehen unter <http://www-ttp.particle.uni-karlsruhe.de/Progdata/ttp07/ttp07-32/> zur Verfügung. Auf Vierschleifenniveau sind die ersten drei bzw. vier Momente der Korrelatoren bekannt [29–33] und unter

<http://www-ttp.particle.uni-karlsruhe.de/Progdata/ttp09/ttp09-18/>
 verfügbar. Die führenden Terme im $\overline{\text{MS}}$ -Schema mit $\mu^2 = m_q^2$ lauten

$$\Pi^{(0),v} = \frac{16}{15}z + \frac{16}{35}z^2 + \frac{256}{945}z^3 + \mathcal{O}(z^4), \quad (\text{A.4})$$

$$\Pi^{(1),v} = \frac{13}{9} + \frac{3104}{1215}z + \frac{15728}{14175}z^2 + \frac{773056}{1488375}z^3 + \mathcal{O}(z^4), \quad (\text{A.5})$$

$$\bar{C}_1^{(2),v} = -\frac{2713207}{58320} + \frac{1512719}{38880}\zeta_3 + \frac{2414}{3645}n_l + n_h\left(-\frac{10703}{21870} + \frac{203}{324}\zeta_3\right),$$

$$\bar{C}_2^{(2),v} = -\frac{421983603089}{1469664000} + \frac{69687263}{290304}\zeta_3 + \frac{290179}{637875}n_l \\ + n_h\left(-\frac{547639}{870912} + \frac{14203}{27648}\zeta_3\right),$$

$$\bar{C}_3^{(2),v} = -\frac{2060753884304831}{1280240640000} + \frac{311075618701}{232243200}\zeta_3 + \frac{22340824}{52093125}n_l \\ + n_h\left(-\frac{192189289}{244944000} + \frac{12355}{20736}\zeta_3\right),$$

$$\bar{C}_1^{(3),v} = -\frac{5397779543}{146966400} - \frac{84951877}{7348320}c_4 - \frac{1019840}{5103}\text{Li}_5 + \frac{25496}{15309}\log^5 2 \\ - \frac{254960}{15309}\zeta_2 \log^3 2 + \frac{17554601717}{32659200}\zeta_3 - \frac{2653167371}{9797760}\zeta_4 \\ - \frac{719374}{5103}\zeta_4 \log 2 - \frac{3655}{10206}\zeta_5 + n_l\left(-\frac{9338899}{2099520} - \frac{4793}{174960}c_4 \right. \\ \left. - \frac{48350497}{1399680}\zeta_3 + \frac{1863445}{46656}\zeta_4\right) + n_l^2\left(\frac{42173}{98415} - \frac{112}{405}\zeta_3\right) \\ + n_h\left(-\frac{27670774337}{1414551600} - \frac{348701}{51030}c_4 - \frac{95617883401}{943034400}\zeta_3 \right. \\ \left. + \frac{1447057}{8505}\zeta_4 + \frac{128}{27}\zeta_5\right) + n_h n_l\left(\frac{262877}{787320} - \frac{29}{1458}c_4 \right. \\ \left. - \frac{38909}{58320}\zeta_3 + \frac{1421}{1944}\zeta_4\right) + n_h^2\left(\frac{163868}{295245} - \frac{3287}{7290}\zeta_3\right),$$

$$\bar{C}_2^{(3),v} = \frac{64985074258811347}{353072079360000} - \frac{1662518706713}{21016195200}c_4 - \frac{2900811008}{3648645}\text{Li}_5 \\ + \frac{362601376}{54729675}\log^5 2 - \frac{725202752}{10945935}\zeta_2 \log^3 2 + \frac{112680551036302633}{47076277248000}\zeta_3 \\ - \frac{26401638588211}{28021593600}\zeta_4 - \frac{1684950406}{3648645}\zeta_4 \log 2 - \frac{164928917}{270270}\zeta_5 \\ + n_l\left(\frac{12880492650661}{529079040000} - \frac{520999}{19595520}c_4 - \frac{52898582827}{223948800}\zeta_3 \right. \\ \left. + \frac{899343889}{3732480}\zeta_4\right) + n_l^2\left(\frac{15441973}{57408750} - \frac{32}{135}\zeta_3\right)$$

$$\begin{aligned}
 & + n_h \left(-\frac{16444377265034167}{127105948569600} - \frac{1839578135}{31352832} c_4 - \frac{2684149096835237}{3138418483200} \zeta_3 \right. \\
 & + \frac{310177840243}{209018880} \zeta_4 + \frac{724}{63} \zeta_5 \Big) + n_h n_l \left(\frac{95040709}{188116992} \right. \\
 & - \frac{2029}{124416} c_4 - \frac{12159109}{13934592} \zeta_3 + \frac{99421}{165888} \zeta_4 \Big) + n_h^2 \left(\frac{1842464707}{1939956480} \right. \\
 & - \frac{2744471}{3193344} \zeta_3 \Big), \\
 \bar{C}_3^{(3),v} = & \frac{8011001677156303009183663}{1270551061901721600000} - \frac{16091704629458603}{45731240755200} c_4 \\
 & - \frac{859399602944}{310134825} \text{Li}_5 + \frac{107424950368}{4652022375} \log^5 2 - \frac{214849900736}{930404475} \zeta_2 \log^3 2 \\
 & + \frac{1061162538194750079871}{128047474114560000} \zeta_3 - \frac{1505000915688143609}{304874938368000} \zeta_4 \\
 & - \frac{38830116184}{44304975} \zeta_4 \log 2 - \frac{1781851011826}{310134825} \zeta_5 \\
 & + n_l \left(\frac{1923847928332192069}{9678619238400000} - \frac{8529817}{348364800} c_4 \right. \\
 & - \frac{267323581073039}{195084288000} \zeta_3 + \frac{207508506307}{154828800} \zeta_4 \Big) \\
 & + n_l^2 \left(\frac{31556642272}{147684009375} - \frac{256}{1215} \zeta_3 \right) + n_h \left(-\frac{21892381583144708369941}{26343767057287680000} \right. \\
 & - \frac{1953445809949}{5029516800} c_4 - \frac{3685474343787853156153}{650463384130560000} \zeta_3 \\
 & + \frac{330904503205967}{33530112000} \zeta_4 + \frac{8896}{315} \zeta_5 \Big) + n_h n_l \left(\frac{60361465477}{88179840000} \right. \\
 & - \frac{1765}{93312} c_4 - \frac{57669161}{52254720} \zeta_3 + \frac{86485}{124416} \zeta_4 \Big) + n_h^2 \left(\frac{56877138427}{37829151360} \right. \\
 & - \frac{6184964549}{4670265600} \zeta_3 \Big), \tag{A.6}
 \end{aligned}$$

$$\Pi^{(0),a} = \frac{8}{15} z + \frac{16}{105} z^2 + \frac{64}{945} z^3 + \mathcal{O}(z^4), \tag{A.7}$$

$$\Pi^{(1),a} = \frac{1028}{1215} z + \frac{2008}{14175} z^2 - \frac{18992}{1488375} z^3 + \mathcal{O}(z^4), \tag{A.8}$$

$$\bar{C}_1^{(2),a} = \frac{1613081}{15552} - \frac{13738259}{155520} \zeta_3 + \frac{502}{1215} n_l + n_h \left(-\frac{685721}{1399680} + \frac{10493}{20736} \zeta_3 \right),$$

$$\begin{aligned}
 \bar{C}_2^{(2),a} = & \frac{1934549548199}{2939328000} - \frac{23871813379}{43545600} \zeta_3 + \frac{13621}{70875} n_l \\
 & + n_h \left(-\frac{1662271}{3732480} + \frac{19579}{55296} \zeta_3 \right),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \bar{C}_3^{(2),a} = & \frac{182055027580685347}{46088663040000} - \frac{9159654986707}{2786918400} \zeta_3 + \frac{21194756}{156279375} n_l \\
 & + n_h \left(-\frac{13379705273}{31352832000} + \frac{4411519}{13271040} \zeta_3 \right),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{C}_1^{(3),a} = & \frac{6038304844519}{5878656000} + \frac{5966100779}{293932800} c_4 - \frac{3996704}{25515} \text{Li}_5 \\
& + \frac{499588}{382725} \log^5 2 - \frac{999176}{76545} \zeta_2 \log^3 2 - \frac{1910114229901}{1306368000} \zeta_3 \\
& + \frac{25214645053}{391910400} \zeta_4 - \frac{7151983}{25515} \zeta_4 \log 2 + \frac{26239187}{34020} \zeta_5 \\
& + n_l \left(-\frac{33628673}{839808} - \frac{12907}{699840} c_4 + \frac{313282529}{2799360} \zeta_3 - \frac{16384897}{186624} \zeta_4 \right) \\
& + n_l^2 \left(\frac{42133}{196830} - \frac{56}{405} \zeta_3 \right) + n_h \left(\frac{453463328653}{4115059200} + \frac{920203769}{16329600} c_4 \right. \\
& + \frac{2277007338343}{2743372800} \zeta_3 - \frac{6237707419}{4354560} \zeta_4 - \frac{182}{27} \zeta_5 \left. \right) \\
& + n_h n_l \left(\frac{21592349}{50388480} - \frac{1499}{93312} c_4 - \frac{2539913}{3732480} \zeta_3 + \frac{73451}{124416} \zeta_4 \right) \\
& + n_h^2 \left(\frac{15134719}{16533720} - \frac{303799}{408240} \zeta_3 \right), \\
\bar{C}_2^{(3),a} = & \frac{217627345572539363}{29957630976000} + \frac{48366697030607}{367783416000} c_4 - \frac{22929814528}{18243225} \text{Li}_5 \\
& + \frac{2866226816}{273648375} \log^5 2 - \frac{5732453632}{54729675} \zeta_2 \log^3 2 - \frac{19481983397047414063}{3295339407360000} \zeta_3 \\
& - \frac{3999530651550337}{980755776000} \zeta_4 - \frac{5480723618}{2606175} \zeta_4 \log 2 + \frac{64302085207}{12162150} \zeta_5 \\
& + n_l \left(-\frac{220313879706619}{1058158080000} - \frac{2041307}{195955200} c_4 + \frac{83715341099}{125411328} \zeta_3 \right. \\
& - \frac{5726009437}{10450944} \zeta_4 \left. \right) + n_l^2 \left(\frac{4275743}{57408750} - \frac{32}{405} \zeta_3 \right) \\
& + n_h \left(\frac{12954770564689293667}{17794832799744000} + \frac{1570088698963}{4572288000} c_4 \right. \\
& + \frac{734972604096061693}{146459529216000} \zeta_3 - \frac{10656435078449}{1219276800} \zeta_4 - \frac{764}{45} \zeta_5 \left. \right) \\
& + n_h n_l \left(\frac{809030351}{1881169920} - \frac{2797}{248832} c_4 - \frac{92264351}{139345920} \zeta_3 + \frac{137053}{331776} \zeta_4 \right) \\
& + n_h^2 \left(\frac{1173822473}{969978240} - \frac{24710027}{23950080} \zeta_3 \right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \bar{C}_3^{(3),a} = & \frac{1229252060576583400157229437}{22869919114230988800000} + \frac{26069736016065697819}{28810681675776000} c_4 \\
 & - \frac{6290348482816}{930404475} \text{Li}_5 + \frac{786293560352}{13956067125} \log^5 2 \\
 & - \frac{1572587120704}{2791213425} \zeta_2 \log^3 2 - \frac{18647336379797344185371}{1075598782562304000} \zeta_3 \\
 & - \frac{84934038473664674083}{1536569689374720} \zeta_4 - \frac{11153783461592}{930404475} \zeta_4 \log 2 \\
 & + \frac{29147971741346}{930404475} \zeta_5 + n_l \left(- \frac{124302402889913578111}{116143430860800000} \right. \\
 & - \frac{254785409}{37623398400} c_4 + \frac{27040948084116311}{7023034368000} \zeta_3 - \frac{23551930399609}{7166361600} \zeta_4 \Big) \\
 & + n_l^2 \left(\frac{6052378456}{147684009375} - \frac{64}{1215} \zeta_3 \right) + n_h \left(\frac{552884149450158334200883}{133105349342085120000} \right. \\
 & + \frac{13951843043900473}{7242504192000} c_4 + \frac{55387135775760293868761}{1971931101364224000} \zeta_3 \\
 & - \frac{94760886164782469}{1931334451200} \zeta_4 - \frac{18752}{405} \zeta_5 \Big) + n_h n_l \left(\frac{4962625369889}{11287019520000} \right. \\
 & - \frac{630217}{59719680} c_4 - \frac{21887209193}{33443020800} \zeta_3 + \frac{30880633}{79626240} \zeta_4 \Big) \\
 & + n_h^2 \left(\frac{599209514131}{378291513600} - \frac{12494549257}{9340531200} \zeta_3 \right), \tag{A.9}
 \end{aligned}$$

$$\Pi^{(0),s} = \frac{4}{5} z + \frac{8}{35} z^2 + \frac{32}{315} z^3 + \mathcal{O}(z^4), \tag{A.10}$$

$$\Pi^{(1),s} = \frac{244}{405} z + \frac{2012}{4725} z^2 + \frac{76184}{496125} z^3 + \mathcal{O}(z^4), \tag{A.11}$$

$$\begin{aligned}
 \bar{C}_1^{(2),s} = & \frac{18869}{810} - \frac{17939}{648} \zeta_3 + \frac{238}{405} n_l + n_h \left(- \frac{60559}{116640} + \frac{1435}{1728} \zeta_3 \right), \\
 \bar{C}_2^{(2),s} = & \frac{32460837007}{244944000} - \frac{80932919}{725760} \zeta_3 + \frac{2396}{10125} n_l + n_h \left(- \frac{4475201}{8709120} + \frac{9107}{18432} \zeta_3 \right), \\
 \bar{C}_3^{(2),s} = & \frac{552490939560619}{640120320000} - \frac{27812462299}{38707200} \zeta_3 + \frac{8144158}{52093125} n_l \\
 & + n_h \left(- \frac{2749662833}{5225472000} + \frac{978439}{2211840} \zeta_3 \right),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{C}_1^{(3),s} &= \frac{183424051}{4898880} + \frac{513923}{122472}c_4 + \frac{240320}{1701}\text{Li}_5 - \frac{6008}{5103}\log^5 2 + \frac{60080}{5103}\zeta_2 \log^3 2 \\
&\quad - \frac{1707578737}{3265920}\zeta_3 + \frac{57294565}{163296}\zeta_4 + \frac{201220}{1701}\zeta_4 \log 2 + \frac{32995}{1701}\zeta_5 \\
&\quad + n_l \left(-\frac{2197597}{349920} + \frac{7}{972}c_4 + \frac{6278503}{233280}\zeta_3 - \frac{35927}{1296}\zeta_4 \right) + \frac{7867}{32805}n_l^2 \\
&\quad + n_h \left(\frac{91614310199}{3772137600} + \frac{13326713}{816480}c_4 + \frac{609136933177}{2514758400}\zeta_3 \right. \\
&\quad \left. - \frac{454390553}{1088640}\zeta_4 + \frac{4}{9}\zeta_5 \right) + n_h n_l \left(\frac{1937539}{4199040} - \frac{205}{7776}c_4 \right. \\
&\quad \left. - \frac{38171}{62208}\zeta_3 + \frac{10045}{10368}\zeta_4 \right) + n_h^2 \left(\frac{1729337}{1377810} - \frac{27479}{34020}\zeta_3 \right), \\
\bar{C}_2^{(3),s} &= \frac{381690470169079}{467026560000} + \frac{402167880157}{28021593600}c_4 + \frac{66906848}{1216215}\text{Li}_5 \\
&\quad - \frac{8363356}{18243225}\log^5 2 + \frac{16726712}{3648645}\zeta_2 \log^3 2 - \frac{1075951565336201}{560431872000}\zeta_3 \\
&\quad + \frac{3294508921817}{5337446400}\zeta_4 - \frac{87227759}{1216215}\zeta_4 \log 2 + \frac{480273679}{694980}\zeta_5 \\
&\quad + n_l \left(-\frac{4484377030163}{88179840000} - \frac{1121}{217728}c_4 + \frac{1786292527}{12441600}\zeta_3 \right. \\
&\quad \left. - \frac{7692863}{69120}\zeta_4 \right) + n_l^2 \left(\frac{1439317}{19136250} - \frac{8}{135}\zeta_3 \right) + n_h \left(\frac{6902486947059149}{33894919618560} \right. \\
&\quad \left. + \frac{25904103151}{261273600}c_4 + \frac{6086962499679157}{4184557977600}\zeta_3 - \frac{176055049307}{69672960}\zeta_4 \right. \\
&\quad \left. - \frac{50}{21}\zeta_5 \right) + n_h n_l \left(\frac{64429199}{125411328} - \frac{1301}{82944}c_4 - \frac{37067899}{46448640}\zeta_3 \right. \\
&\quad \left. + \frac{63749}{110592}\zeta_4 \right) + n_h^2 \left(\frac{34805101}{20207880} - \frac{101467}{71280}\zeta_3 \right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \bar{C}_3^{(3),s} = & \frac{1831719443479347906961831}{211758510316953600000} + \frac{23476362679129111}{266765571072000} c_4 \\
 & - \frac{31233089024}{103378275} \text{Li}_5 + \frac{3904136128}{1550674125} \log^5 2 - \frac{7808272256}{310134825} \zeta_2 \log^3 2 \\
 & - \frac{6840706109244803149}{798870159360000} \zeta_3 - \frac{227245780513489691}{71137485619200} \zeta_4 \\
 & - \frac{132939852688}{103378275} \zeta_4 \log 2 + \frac{550981545544}{103378275} \zeta_5 \\
 & + n_l \left(-\frac{482094088152140627}{1613103206400000} - \frac{2832217}{522547200} c_4 \right. \\
 & \left. + \frac{17490122122607}{19508428800} \zeta_3 - \frac{500486531063}{696729600} \zeta_4 \right) \\
 & + n_l^2 \left(\frac{2229649183}{49228003125} - \frac{64}{1215} \zeta_3 \right) + n_h \left(\frac{181078166933095616101573}{140500090972200960000} \right. \\
 & \left. + \frac{241049108772869}{402361344000} c_4 + \frac{3638442025775826218627}{416296565843558400} \zeta_3 \right. \\
 & \left. - \frac{1637799366516469}{107296358400} \zeta_4 - \frac{3776}{315} \zeta_5 \right) + n_h n_l \left(\frac{1047601560409}{1881169920000} \right. \\
 & \left. - \frac{139777}{9953280} c_4 - \frac{4641507553}{5573836800} \zeta_3 + \frac{6849073}{13271040} \zeta_4 \right) + n_h^2 \left(\frac{82738947097}{36027763200} \right. \\
 & \left. - \frac{11973270941}{6227020800} \zeta_3 \right), \tag{A.12}
 \end{aligned}$$

$$\Pi^{(0),p} = \frac{4}{3} z + \frac{8}{15} z^2 + \frac{32}{105} z^3 + \frac{64}{315} z^4 + \mathcal{O}(z^5), \tag{A.13}$$

$$\Pi^{(1),p} = \frac{28}{9} z + \frac{836}{405} z^2 + \frac{17176}{14175} z^3 + \frac{117872}{165375} z^4 + \mathcal{O}(z^5), \tag{A.14}$$

$$\begin{aligned}
 \bar{C}_1^{(2),p} = & -\frac{13363}{648} + \frac{6473}{432} \zeta_3 + \frac{50}{81} n_l + n_h \left(\frac{14}{81} + \frac{7}{12} \zeta_3 \right), \\
 \bar{C}_2^{(2),p} = & -\frac{302177}{1728} + \frac{7806577}{51840} \zeta_3 + \frac{352}{1215} n_l + n_h \left(\frac{1183}{466560} + \frac{1253}{6912} \zeta_3 \right), \\
 \bar{C}_3^{(2),p} = & -\frac{9075351389}{7838208} + \frac{14043387341}{14515200} \zeta_3 + \frac{18982}{70875} n_l \\
 & + n_h \left(-\frac{642073}{3732480} + \frac{10045}{55296} \zeta_3 \right), \\
 \bar{C}_4^{(2),p} = & -\frac{108113646595028461}{15362887680000} + \frac{5441229494077}{928972800} \zeta_3 \\
 & + \frac{14913212}{52093125} n_l + n_h \left(-\frac{234529787}{696729600} + \frac{130123}{491520} \zeta_3 \right),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{C}_1^{(3),p} = & -\frac{3732431}{34992} - \frac{130535}{34992}c_4 + \frac{10304}{243}\text{Li}_5 - \frac{1288}{3645}\log^5 2 + \frac{2576}{729}\zeta_2 \log^3 2 \\
& + \frac{4653637}{15552}\zeta_3 - \frac{5686729}{46656}\zeta_4 + \frac{20188}{243}\zeta_4 \log 2 - \frac{35189}{243}\zeta_5 \\
& + n_l \left(-\frac{7381}{5832} + \frac{115}{5832}c_4 - \frac{157783}{7776}\zeta_3 + \frac{115709}{7776}\zeta_4 \right) + \frac{277}{729}n_l^2 \\
& + n_h \left(-\frac{373843}{453600} - \frac{294727}{58320}c_4 - \frac{7656133}{85050}\zeta_3 + \frac{9593011}{77760}\zeta_4 + \frac{80}{9}\zeta_5 \right) \\
& + n_h n_l \left(-\frac{3457}{11664} - \frac{1}{54}c_4 + \frac{35}{96}\zeta_3 + \frac{49}{72}\zeta_4 \right) + n_h^2 \left(-\frac{9493}{25515} + \frac{403}{630}\zeta_3 \right), \\
\bar{C}_2^{(3),p} = & -\frac{509351043139}{653184000} - \frac{3509250197}{97977600}c_4 + \frac{278048}{945}\text{Li}_5 - \frac{34756}{14175}\log^5 2 \\
& + \frac{69512}{2835}\zeta_2 \log^3 2 + \frac{2871407869129}{1306368000}\zeta_3 - \frac{94380515779}{130636800}\zeta_4 \\
& + \frac{180277}{315}\zeta_4 \log 2 - \frac{45178393}{34020}\zeta_5 + n_l \left(\frac{8402929}{279936} - \frac{493}{77760}c_4 \right. \\
& \left. - \frac{151413217}{933120}\zeta_3 + \frac{1044179}{6912}\zeta_4 \right) + n_l^2 \left(\frac{15511}{65610} - \frac{56}{405}\zeta_3 \right) \\
& + n_h \left(-\frac{351736938533}{3017710080} - \frac{978527581}{16329600}c_4 - \frac{8948001289387}{10059033600}\zeta_3 \right. \\
& \left. + \frac{6586806599}{4354560}\zeta_4 + \frac{62}{3}\zeta_5 \right) + n_h n_l \left(-\frac{1951867}{16796160} \right. \\
& \left. - \frac{179}{31104}c_4 + \frac{17839}{1244160}\zeta_3 + \frac{8771}{41472}\zeta_4 \right) + n_h^2 \left(-\frac{1699529}{5511240} + \frac{36809}{136080}\zeta_3 \right), \\
\bar{C}_3^{(3),p} = & -\frac{841507212739667387}{549223234560000} - \frac{62193803213161}{245188944000}c_4 \\
& + \frac{15214899712}{6081075}\text{Li}_5 - \frac{1901862464}{91216125}\log^5 2 + \frac{3803724928}{18243225}\zeta_2 \log^3 2 \\
& + \frac{767220341123064149}{84495882240000}\zeta_3 - \frac{9141288770183}{5108103000}\zeta_4 \\
& + \frac{3649219472}{868725}\zeta_4 \log 2 - \frac{58401651592}{6081075}\zeta_5 \\
& + n_l \left(\frac{81164834177717}{352719360000} - \frac{259289}{21772800}c_4 - \frac{1110789087229}{1045094400}\zeta_3 \right. \\
& \left. + \frac{1873555687}{1935360}\zeta_4 \right) + n_l^2 \left(\frac{5893303}{28704375} - \frac{64}{405}\zeta_3 \right) \\
& + n_h \left(-\frac{5199641357650471703}{5931610933248000} - \frac{3832600669957}{9144576000}c_4 \right. \\
& \left. - \frac{99860902695868939}{16273281024000}\zeta_3 + \frac{25944887964461}{2438553600}\zeta_4 + \frac{736}{15}\zeta_5 \right) \\
& + n_h n_l \left(\frac{103200341}{1881169920} - \frac{1435}{248832}c_4 - \frac{5574817}{27869184}\zeta_3 + \frac{70315}{331776}\zeta_4 \right) \\
& + n_h^2 \left(-\frac{26179537}{176359680} + \frac{76295}{870912}\zeta_3 \right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \bar{C}_4^{(3),p} = & \frac{160999779080808137440043699}{7623306371410329600000} - \frac{15601462649447899319}{9603560558592000} c_4 \\
 & + \frac{133358649856}{8860995} \text{Li}_5 - \frac{16669831232}{132914925} \log^5 2 + \frac{33339662464}{26582985} \zeta_2 \log^3 2 \\
 & + \frac{519180776457371224187}{21090172207104000} \zeta_3 - \frac{41651006271487731961}{12804747411456000} \zeta_4 \\
 & + \frac{1559619599504}{62026965} \zeta_4 \log 2 - \frac{3679557604076}{62026965} \zeta_5 \\
 & + n_l \left(\frac{5831362334787736057}{4301608550400000} - \frac{964223}{71663616} c_4 - \frac{37000165292677}{5780275200} \zeta_3 \right. \\
 & \left. + \frac{13993115076023}{2388787200} \zeta_4 \right) + n_l^2 \left(\frac{329624056}{1823259375} - \frac{64}{405} \zeta_3 \right) \\
 & + n_h \left(- \frac{4594862168018858116865083}{843000545833205760000} - \frac{1233746391612463}{482833612800} c_4 \right. \\
 & \left. - \frac{465767648850472076783089}{12488896975306752000} \zeta_3 + \frac{41849655265930927}{643778150400} \zeta_4 + \frac{23552}{189} \zeta_5 \right) \\
 & + n_h n_l \left(\frac{6245190619}{27869184000} - \frac{18589}{2211840} c_4 - \frac{1587980983}{3715891200} \zeta_3 + \frac{910861}{2949120} \zeta_4 \right) \\
 & + n_h^2 \left(\frac{1739021393}{14010796800} - \frac{52674403}{345945600} \zeta_3 \right). \tag{A.15}
 \end{aligned}$$

Die für die Umrechnung in das On-shell-Schema benötigten Formeln sind in Anhang D.3 angegeben. Der Singulettbeitrag zu den führenden drei Momente des Vektorstromkorrelators ist

$$\begin{aligned}
 \bar{C}_{S,1}^{(3),v} &= \frac{664837}{577368} - \frac{739}{972} c_4 - \frac{2017831}{192456} \zeta_3 + \frac{875}{54} \zeta_4, \\
 \bar{C}_{S,2}^{(3),v} &= \frac{5881974201847}{1883051089920} + \frac{97011619}{156764160} c_4 + \frac{796232393699}{83691159552} \zeta_3 \\
 &\quad - \frac{745372259}{41803776} \zeta_4, \\
 \bar{C}_{S,3}^{(3),v} &= \frac{7118016595194017}{683033986252800} + \frac{22845879073}{5486745600} c_4 + \frac{343009147408727}{5621678899200} \zeta_3 \\
 &\quad - \frac{787819133821}{7315660800} \zeta_4. \tag{A.16}
 \end{aligned}$$

A.2 Schwellenentwicklung

Das Schwellenverhalten der Polarisationsfunktionen kann mit Hilfe der nichtrelativistischen QCD (NRQCD) [103, 104] berechnet werden. Aus den bekannten NNLO-Ergebnissen in [105–107] können die hier verwendeten Schwellenentwicklungen der Form

$$\Pi^{(i),\delta}(z) = \sum_{n=n_i}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} K_{nm}^{(i),\delta} (\sqrt{1-z})^n \log(1-z)^m \tag{A.17}$$

für die Korrelatoren der skalaren Ströme, Vektorströme und Axialvektorströme hergeleitet werden; die entsprechende Rechnung für den pseudoskalaren Korrelator wurde in [35] durchgeführt. Explizite Ergebnisse für das naive Schwellenverhalten finden sich in [24, 25] bis zur Ordnung α_s^2 und in [34, 35] bis α_s^3 . In dieser Arbeit werden die Koeffizienten zur Ordnung α_s^3 benötigt; die bislang bekannten Ergebnisse lauten im On-shell-Schema für $n_h = 1$ massives und n_l masselose Quarks

$$\begin{aligned}
K_{-20}^{(3),v} &= \frac{2}{9}\zeta_3\pi^2, \\
K_{-10}^{(3),v} &= -\frac{1}{108}\pi^3 - \frac{11}{18}\log 2\pi^3 - \frac{11}{3}\zeta_3\pi + n_l\left(-\frac{5}{162}\pi^3 + \frac{1}{27}\log 2\pi^3 + \frac{2}{9}\zeta_3\pi\right), \\
K_{-11}^{(3),v} &= -\frac{11}{36}\pi^3 + \frac{\pi^3}{54}n_l, \\
K_{01}^{(3),v} &= -\frac{4169}{3456} - \frac{20741}{5184}\pi^2 + \frac{9}{256}\pi^4 + \frac{71}{24}\log 2 + \frac{56}{27}\log 2\pi^2 - \frac{121}{16}\log^2 2 \\
&\quad + \frac{1703}{288}\zeta_3 + n_l\left(\frac{79}{576} + \frac{11}{48}\pi^2 - \frac{55}{48}\log 2 + \frac{11}{12}\log^2 2 + \frac{13}{48}\zeta_3\right) \\
&\quad + n_l^2\left(-\frac{25}{1296} - \frac{1}{144}\pi^2 + \frac{5}{108}\log 2 - \frac{1}{36}\log^2 2\right), \\
K_{02}^{(3),v} &= \frac{71}{96} + \frac{35}{108}\pi^2 - \frac{121}{32}\log 2 + n_l\left(-\frac{55}{192} + \frac{11}{24}\log 2\right) \\
&\quad + n_l^2\left(\frac{5}{432} - \frac{1}{72}\log 2\right), \\
K_{03}^{(3),v} &= -\frac{121}{192} + \frac{11}{144}n_l - \frac{1}{432}n_l^2, \tag{A.18}
\end{aligned}$$

$$K_{01}^{(3),a} = -\frac{2\pi^2}{27}, \tag{A.19}$$

$$K_{01}^{(3),s} = -\frac{\pi^2}{9}, \tag{A.20}$$

$$\begin{aligned}
K_{-20}^{(3),p} &= \frac{2}{9}\zeta_3\pi^2, \\
K_{-10}^{(3),p} &= \frac{7}{108}\pi^3 - \frac{11}{18}\log 2\pi^3 - \frac{11}{3}\zeta_3\pi + n_l\left(-\frac{5}{162}\pi^3 + \frac{1}{27}\log 2\pi^3 + \frac{2}{9}\zeta_3\pi\right), \\
K_{-11}^{(3),p} &= -\frac{11}{36}\pi^3 + \frac{\pi^3}{54}n_l, \\
K_{01}^{(3),p} &= -\frac{539}{128} - \frac{7207}{1728}\pi^2 + \frac{9}{256}\pi^4 + \frac{115}{24}\log 2 + 3\log 2\pi^2 - \frac{121}{16}\log^2 2 \\
&\quad + \frac{287}{32}\zeta_3 + n_l\left(\frac{701}{1728} + \frac{11}{48}\pi^2 - \frac{181}{144}\log 2 + \frac{11}{12}\log^2 2 + \frac{13}{48}\zeta_3\right) \\
&\quad + n_l^2\left(-\frac{25}{1296} - \frac{1}{144}\pi^2 + \frac{5}{108}\log 2 - \frac{1}{36}\log^2 2\right), \\
K_{02}^{(3),p} &= \frac{115}{96} + \frac{17}{36}\pi^2 - \frac{121}{32}\log 2 + n_l\left(-\frac{181}{576} + \frac{11}{24}\log 2\right) + n_l^2\left(\frac{5}{432} - \frac{1}{72}\log 2\right),
\end{aligned}$$

$$K_{03}^{(3),p} = -\frac{121}{192} + \frac{11}{144}n_l - \frac{1}{432}n_l^2. \quad (\text{A.21})$$

A.3 Hochenergieentwicklung

Die euklidische Hochenergieentwicklung der Polarisationsfunktionen ist

$$\Pi^\delta(z) = \sum_{n,m=0}^{\infty} H_{nm}^\delta \left(\frac{1}{z}\right)^n \log(-4z)^m \quad (\text{A.22})$$

mit

$$H_{nm}^\delta = \frac{3}{16\pi^2} D_{nm}^\delta. \quad (\text{A.23})$$

Auf Dreischleifenniveau sind die führenden fünf Koeffizienten bis $n = 4$ in der Entwicklung des skalaren und des pseudoskalaren Korrelators in [108] angegeben; für den Vektor- und den Axialvektorkorrelator sind in [109] bzw. [110] je sieben Terme zu finden. In dieser Arbeit werden die Koeffizienten in Vier- und Fünfschleifenordnung benötigt. Einige der im Folgenden aufgeführten Koeffizienten wurden in [69–73, 97, 111] berechnet, andere sind bislang unveröffentlicht [75, 76].

Einige Teilergebnisse sind nicht vollständig analytisch bekannt. Sie werden hier durch folgende Konstanten parametrisiert:

$$\begin{aligned} N_{40505\epsilon 3} &\approx -9090,20867997705001441370259427902082417, \\ N_{40505\epsilon 4} &\approx -63850,1424496280567654758079403655066039675528545348, \\ N_{406112\epsilon 2} &\approx -4647,35245483119362798782761020092568381, \\ N_{406112\epsilon 3} &\approx -28107,5715670960878830893417996758562446024390712307, \\ N_{40602\epsilon 2} &\approx -4609,64010449680326204100165437574570967564954728942, \\ N_{406111\epsilon 2} &\approx -7607,58935727331640672412576730534525017830137117901, \\ N_{407117\epsilon 1} &\approx -758,669486731967257046185950411227644240941810349848, \\ N_{407118\epsilon 1} &\approx -929,858212294016976382457232976107077779091868024097, \\ N_{40802\epsilon 0} &\approx -22,537603466457242084574556324043716786729915023722, \\ N_{40903\epsilon 1} &\approx -5,5459654251191013. \end{aligned} \quad (\text{A.24})$$

Die Hochenergieentwicklungen bis zur Ordnung $z^{-2}\alpha_s^3$ lauten im On-shell-Schema mit $\mu^2 = m_q^2$ für $n_h = 1$ massives und n_l masselose Quarks

$$\Pi^{(0),v} = \frac{3}{16\pi^2} \left[\frac{20}{9} - \frac{4}{3}L_z + \frac{2}{z} + \frac{1}{z^2} \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}L_z \right) \right], \quad (\text{A.25})$$

$$\begin{aligned} \Pi^{(1),v} &= \frac{3}{16\pi^2} \left[\frac{10}{9} - \frac{4}{3}L_z - \frac{16}{3}\zeta_3 + \frac{1}{z}(-4L_z) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{z^2} \left(\frac{1}{18} - \frac{5}{6}L_z - L_z^2 + \frac{4}{3}\zeta_3 \right) \right], \end{aligned} \quad (\text{A.26})$$

$$\begin{aligned}
D_{00}^{(2),v} &= \frac{383}{9} - \frac{28}{27}\pi^2 - \frac{2413}{36}\zeta_3 + \frac{100}{9}\zeta_5 - \frac{8}{27}\pi^2 \log 2 \\
&\quad + n_l \left(-\frac{232}{81} + \frac{4}{27}\pi^2 + \frac{76}{27}\zeta_3 \right), \\
D_{01}^{(2),v} &= -\frac{365}{18} + \frac{44}{3}\zeta_3 + n_l \left(\frac{11}{9} - \frac{8}{9}\zeta_3 \right), \\
D_{02}^{(2),v} &= \frac{11}{6} - \frac{1}{9}n_l, \\
D_{10}^{(2),v} &= \frac{892}{27} - \frac{14}{9}\pi^2 + \frac{214}{27}\zeta_3 - \frac{1045}{27}\zeta_5 - \frac{4}{9}\pi^2 \log 2 + n_l \left(-\frac{2}{3} + \frac{2}{9}\pi^2 \right), \\
D_{11}^{(2),v} &= -\frac{63}{2} + \frac{13}{9}n_l, \\
D_{12}^{(2),v} &= \frac{19}{2} - \frac{1}{3}n_l, \\
D_{20}^{(2),v} &= \frac{331}{288} - \frac{2}{27}c_4 + \frac{251}{12}\zeta_3 + \frac{25}{18}\zeta_4 - \frac{175}{18}\zeta_5 + n_l \left(-\frac{83}{1296} - \frac{28}{27}\zeta_3 \right), \\
D_{21}^{(2),v} &= -\frac{103}{18} - \frac{7}{9}\pi^2 - \frac{26}{3}\zeta_3 - \frac{2}{9}\pi^2 \log 2 + n_l \left(\frac{35}{108} + \frac{1}{9}\pi^2 + \frac{2}{9}\zeta_3 \right), \\
D_{22}^{(2),v} &= -\frac{16}{3} + \frac{11}{36}n_l, \\
D_{23}^{(2),v} &= \frac{9}{4} - \frac{1}{18}n_l, \\
D_{00}^{(3),v} &= \frac{111479010323941}{150493593600} - \frac{1}{576}N_{406112\epsilon 2} + \frac{5}{3072}N_{40505\epsilon 3} + \frac{55577}{29160}c_4 \\
&\quad - \frac{1120}{81}\text{Li}_5 - \frac{17360261401}{358318080}\pi^2 + \frac{505094687}{447897600}\pi^4 - \frac{18967}{26127360}\pi^6 \\
&\quad - \frac{573400439501}{522547200}\zeta_3 + \frac{2193253}{248832}\zeta_3\pi^2 - \frac{1}{6912}\zeta_3\pi^4 + \frac{6844885}{62208}\zeta_3^2 \\
&\quad + \frac{55}{36}\zeta_4 + \frac{22229551}{414720}\zeta_5 - \frac{1}{2304}\zeta_5\pi^2 - \frac{1191725}{48384}\zeta_7 - \frac{1843}{216}\zeta_5 \\
&\quad + \frac{2236}{243}\pi^2 \log 2 - \frac{533}{2916}\pi^4 \log 2 - \frac{5177}{29160}\pi^2 \log^2 2 + \frac{55577}{4860}\zeta_2 \log^2 2 \\
&\quad - \frac{140}{729}\pi^2 \log^3 2 + \frac{28}{243}\log^5 2 + n_l \left(-\frac{14353}{162} + \frac{1}{486}c_4 + \frac{1031}{243}\pi^2 \right. \\
&\quad \left. - \frac{9367}{58320}\pi^4 + \frac{135871}{1296}\zeta_3 - \frac{20}{9}\zeta_3^2 - \frac{55}{108}\zeta_4 + \frac{1090}{81}\zeta_5 + \frac{88}{243}\pi^2 \log 2 \right. \\
&\quad \left. - \frac{49}{486}\pi^2 \log^2 2 + \frac{1}{81}\zeta_2 \log^2 2 \right) \\
&\quad + n_l^2 \left(\frac{3329}{1458} - \frac{26}{243}\pi^2 - \frac{442}{243}\zeta_3 - \frac{20}{27}\zeta_5 \right), \\
D_{01}^{(3),v} &= -\frac{87029}{216} + \frac{1103}{3}\zeta_3 - \frac{550}{9}\zeta_5 + n_l \left(\frac{7847}{162} - \frac{1048}{27}\zeta_3 + \frac{100}{27}\zeta_5 \right) \\
&\quad + n_l^2 \left(-\frac{302}{243} + \frac{76}{81}\zeta_3 \right), \\
D_{02}^{(3),v} &= \frac{4321}{72} - \frac{121}{3}\zeta_3 + n_l \left(-\frac{785}{108} + \frac{44}{9}\zeta_3 \right) + n_l^2 \left(\frac{11}{54} - \frac{4}{27}\zeta_3 \right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 D_{03}^{(3),v} &= -\frac{121}{36} + \frac{11}{27}n_l - \frac{1}{81}n_l^2, \\
 D_{10}^{(3),v} &= \frac{601225}{972} + \frac{38}{27}c_4 - \frac{723941}{9720}\pi^2 + \frac{313}{648}\pi^4 - \frac{13373}{54}\zeta_3 \\
 &\quad + \frac{1439}{108}\zeta_3\pi^2 + \frac{7225}{108}\zeta_3^2 - \frac{21650}{27}\zeta_5 + \frac{1027019}{2592}\zeta_7 \\
 &\quad + \frac{1082}{81}\pi^2\log 2 + \frac{32}{27}\pi^2\log^2 2 + \frac{76}{9}\zeta_2\log^2 2 \\
 &\quad + n_l\left(-\frac{10763}{243} - \frac{4}{81}c_4 + \frac{1067}{162}\pi^2 - \frac{61}{486}\pi^4 + \frac{4543}{243}\zeta_3 - \frac{106}{27}\zeta_3^2\right. \\
 &\quad \left.- \frac{5}{3}\zeta_4 + \frac{7220}{243}\zeta_5 + \frac{44}{81}\pi^2\log 2 - \frac{8}{81}\pi^2\log^2 2 - \frac{8}{27}\zeta_2\log^2 2\right) \\
 &\quad + n_l^2\left(\frac{13}{27} - \frac{13}{81}\pi^2 - \frac{4}{9}\zeta_3\right), \\
 D_{11}^{(3),v} &= -\frac{22351}{36} + \frac{28}{9}\pi^2 - \frac{502}{9}\zeta_3 + \frac{5225}{18}\zeta_5 + \frac{8}{9}\pi^2\log 2 \\
 &\quad + n_l\left(\frac{8429}{162} - \frac{4}{9}\pi^2 + \frac{466}{81}\zeta_3 - \frac{1045}{81}\zeta_5\right) - \frac{125}{162}n_l^2, \\
 D_{12}^{(3),v} &= \frac{1299}{8} - \frac{493}{36}n_l + \frac{13}{54}n_l^2, \\
 D_{13}^{(3),v} &= -\frac{95}{4} + \frac{17}{9}n_l - \frac{1}{27}n_l^2, \\
 D_{21}^{(3),v} &= -\frac{91015}{1296} + \frac{19}{27}c_4 - \frac{698741}{19440}\pi^2 + \frac{313}{1296}\pi^4 - \frac{56257}{216}\zeta_3 \\
 &\quad + \frac{1439}{216}\zeta_3\pi^2 + \frac{1885}{18}\zeta_5 + \frac{571}{81}\pi^2\log 2 + \frac{16}{27}\pi^2\log^2 2 + \frac{38}{9}\zeta_2\log^2 2 \\
 &\quad + n_l\left(\frac{21011}{2592} - \frac{2}{81}c_4 + \frac{1007}{324}\pi^2 - \frac{61}{972}\pi^4 + \frac{2323}{108}\zeta_3 - \frac{5}{6}\zeta_4\right. \\
 &\quad \left.- \frac{110}{27}\zeta_5 + \frac{22}{81}\pi^2\log 2 - \frac{4}{81}\pi^2\log^2 2 - \frac{4}{27}\zeta_2\log^2 2\right) \\
 &\quad + n_l^2\left(-\frac{35}{216} - \frac{13}{162}\pi^2 - \frac{28}{81}\zeta_3\right), \\
 D_{22}^{(3),v} &= -\frac{16847}{288} + \frac{14}{9}\pi^2 + \frac{247}{6}\zeta_3 + \frac{4}{9}\pi^2\log 2 \\
 &\quad + n_l\left(\frac{2689}{432} - \frac{2}{9}\pi^2 - \frac{5}{3}\zeta_3\right) + n_l^2\left(-\frac{59}{648} + \frac{1}{27}\zeta_3\right), \\
 D_{23}^{(3),v} &= \frac{2881}{96} - \frac{85}{36}n_l + \frac{23}{648}n_l^2, \\
 D_{24}^{(3),v} &= -\frac{171}{32} + \frac{23}{72}n_l - \frac{1}{216}n_l^2, \tag{A.27}
 \end{aligned}$$

$$\Pi^{(0),a} = \frac{3}{16\pi^2} \left[\frac{32}{9} - \frac{4}{3}L_z + \frac{1}{z}(-2 + 2L_z) + \frac{1}{z^2} \left(-\frac{3}{4} - \frac{1}{2}L_z \right) \right], \tag{A.28}$$

$$\begin{aligned}
 \Pi^{(1),a} &= \frac{3}{16\pi^2} \left[\frac{98}{27} - \frac{4}{3}L_z - \frac{16}{3}\zeta_3 + \frac{1}{z}(-7 + 2L_z - 2L_z^2 + 8\zeta_3) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{z^2} \left(\frac{49}{18} + \frac{11}{6}L_z + L_z^2 - \frac{8}{3}\zeta_3 \right) \right], \tag{A.29} \\
 D_{00}^{(2),a} &= \frac{47197}{1944} - \frac{28}{27}\pi^2 - \frac{72431}{1296}\zeta_3 + \frac{100}{9}\zeta_5 - \frac{8}{27}\pi^2 \log 2 \\
 &\quad + n_l \left(-\frac{590}{243} + \frac{4}{27}\pi^2 + \frac{76}{27}\zeta_3 \right), \\
 D_{10}^{(2),a} &= -\frac{616}{9} - \frac{2}{9}c_4 + \frac{28}{9}\pi^2 + \frac{11}{270}\pi^4 + \frac{697}{6}\zeta_3 + \frac{1}{2}\zeta_4 \\
 &\quad - 55\zeta_5 + \frac{8}{9}\pi^2 \log 2 + \frac{2}{9}\pi^2 \log^2 2 - \frac{4}{3}\zeta_2 \log^2 2 \\
 &\quad + n_l \left(\frac{217}{54} - \frac{4}{9}\pi^2 - \frac{40}{9}\zeta_3 \right), \\
 D_{11}^{(2),a} &= \frac{977}{18} - \frac{14}{9}\pi^2 - \frac{115}{3}\zeta_3 - \frac{4}{9}\pi^2 \log 2 + n_l \left(-\frac{20}{9} + \frac{2}{9}\pi^2 + \frac{4}{3}\zeta_3 \right), \\
 D_{12}^{(2),a} &= -\frac{41}{2} + \frac{8}{9}n_l, \\
 D_{13}^{(2),a} &= \frac{19}{6} - \frac{1}{9}n_l, \\
 D_{20}^{(2),a} &= \frac{1513}{96} + \frac{2}{27}c_4 + \frac{7}{9}\pi^2 - \frac{889}{108}\zeta_3 - \frac{25}{18}\zeta_4 - \frac{385}{54}\zeta_5 + \frac{2}{9}\pi^2 \log 2 \\
 &\quad + n_l \left(-\frac{1427}{1296} - \frac{1}{9}\pi^2 + \frac{26}{27}\zeta_3 \right), \\
 D_{21}^{(2),a} &= -\frac{17}{6} + \frac{7}{9}\pi^2 + \frac{55}{3}\zeta_3 + \frac{2}{9}\pi^2 \log 2 + n_l \left(-\frac{5}{12} - \frac{1}{9}\pi^2 - \frac{4}{9}\zeta_3 \right), \\
 D_{22}^{(2),a} &= \frac{13}{4} - \frac{11}{36}n_l, \\
 D_{23}^{(2),a} &= -\frac{9}{4} + \frac{1}{18}n_l, \\
 D_{00}^{(3),a} &= \frac{22966942063}{36741600} - \frac{981773}{131220}c_4 + \frac{59584}{729}\text{Li}_5 - \frac{708821}{14580}\pi^2 + \frac{6992681}{3936600}\pi^4 \\
 &\quad - \frac{7567093627}{8164800}\zeta_3 + \frac{1439}{162}\zeta_3\pi^2 + 110\zeta_3^2 + \frac{55}{36}\zeta_4 - \frac{81319}{729}\zeta_5 - \frac{665}{27}\zeta_7 \\
 &\quad + \frac{2236}{243}\pi^2 \log 2 + \frac{35584}{32805}\pi^4 \log 2 + \frac{1208573}{131220}\pi^2 \log^2 2 \\
 &\quad - \frac{981773}{21870}\zeta_2 \log^2 2 + \frac{7448}{6561}\pi^2 \log^3 2 - \frac{7448}{10935}\log^5 2 + n_l \left(-\frac{3137779}{34992} \right. \\
 &\quad + \frac{395}{17496}c_4 + \frac{1031}{243}\pi^2 - \frac{79859}{2099520}\pi^4 + \frac{1007873}{11664}\zeta_3 - \frac{20}{9}\zeta_3^2 - \frac{55}{108}\zeta_4 \\
 &\quad + \frac{1090}{81}\zeta_5 + \frac{88}{243}\pi^2 \log 2 - \frac{2123}{17496}\pi^2 \log^2 2 + \frac{395}{2916}\zeta_2 \log^2 2 \Big) \\
 &\quad + n_l^2 \left(\frac{11209}{4374} - \frac{26}{243}\pi^2 - \frac{442}{243}\zeta_3 - \frac{20}{27}\zeta_5 \right),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 D_{10}^{(3),a} = & -\frac{26369456755697}{17199267840} + \frac{5}{72}N_{40903\epsilon 1} - \frac{13}{144}N_{407118\epsilon 1} + \frac{31}{144}N_{407117\epsilon 1} \\
 & - \frac{5}{384}N_{406112\epsilon 3} + \frac{1}{54}N_{406111\epsilon 2} - \frac{17}{144}N_{40602\epsilon 2} + \frac{5}{2048}N_{40505\epsilon 4} \\
 & - \frac{13429}{648}c_4 - \frac{5960}{9}\text{Li}_5 + \frac{727721}{4860}\pi^2 + \frac{253781}{155520}\pi^4 - \frac{277}{1008}\pi^6 \\
 & + \frac{144713179}{77760}\zeta_3 - \frac{1775}{54}\zeta_3\pi^2 - \frac{1}{36}\zeta_3\pi^4 - \frac{24407}{216}\zeta_3^2 + \frac{1261}{288}\zeta_4 \\
 & - \frac{7003}{864}\zeta_5 - \frac{325}{48}\zeta_6 + \frac{130307}{864}\zeta_7 - \frac{2146}{81}\pi^2\log 2 - \frac{1157}{162}\pi^4\log 2 \\
 & - \frac{16}{9}\zeta_3\pi^2\log 2 + \frac{10069}{648}\pi^2\log^2 2 - \frac{13429}{108}\zeta_2\log^2 2 \\
 & - \frac{745}{81}\pi^2\log^3 2 + \frac{149}{27}\log^5 2 + n_l\left(\frac{164869}{1296} + \frac{28}{81}c_4 + \frac{32}{9}\text{Li}_5\right. \\
 & - \frac{1076}{81}\pi^2 + \frac{3803}{9720}\pi^4 - \frac{17995}{108}\zeta_3 + \frac{8}{9}\zeta_3\pi^2 - \frac{4}{9}\zeta_3^2 + \frac{11}{4}\zeta_4 \\
 & + \frac{647}{36}\zeta_5 - \frac{88}{81}\pi^2\log 2 + \frac{49}{810}\pi^4\log 2 - \frac{4}{81}\pi^2\log^2 2 + \frac{56}{27}\zeta_2\log^2 2 \\
 & + \frac{4}{81}\pi^2\log^3 2 - \frac{4}{135}\log^5 2\left.) + n_l^2\left(-\frac{5885}{1944} + \frac{26}{81}\pi^2 - \frac{7}{1080}\pi^4\right.\right. \\
 & \left. + \frac{70}{27}\zeta_3 - \frac{1}{12}\zeta_4 + \frac{10}{9}\zeta_5\right), \\
 D_{11}^{(3),a} = & \frac{202367}{216} + \frac{38}{27}c_4 - \frac{739061}{9720}\pi^2 + \frac{313}{648}\pi^4 - \frac{112153}{108}\zeta_3 \\
 & + \frac{1439}{108}\zeta_3\pi^2 + \frac{20885}{54}\zeta_5 + \frac{1046}{81}\pi^2\log 2 + \frac{32}{27}\pi^2\log^2 2 + \frac{76}{9}\zeta_2\log^2 2 \\
 & + n_l\left(-\frac{58105}{648} - \frac{4}{81}c_4 + \frac{1103}{162}\pi^2 - \frac{61}{486}\pi^4 + \frac{4523}{54}\zeta_3 - \frac{5}{3}\zeta_4\right. \\
 & - \frac{55}{3}\zeta_5 + \frac{44}{81}\pi^2\log 2 - \frac{8}{81}\pi^2\log^2 2 - \frac{8}{27}\zeta_2\log^2 2\left.)\right) \\
 & + n_l^2\left(\frac{601}{324} - \frac{13}{81}\pi^2 - \frac{40}{27}\zeta_3\right), \\
 D_{12}^{(3),a} = & -\frac{9893}{24} + \frac{14}{9}\pi^2 + \frac{1747}{12}\zeta_3 + \frac{4}{9}\pi^2\log 2 \\
 & + n_l\left(\frac{2657}{72} - \frac{2}{9}\pi^2 - \frac{59}{6}\zeta_3\right) + n_l^2\left(-\frac{209}{324} + \frac{2}{9}\zeta_3\right), \\
 D_{13}^{(3),a} = & 66 - \frac{595}{108}n_l + \frac{8}{81}n_l^2, \\
 D_{14}^{(3),a} = & -\frac{95}{16} + \frac{17}{36}n_l - \frac{1}{108}n_l^2,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 D_{21}^{(3),a} &= -\frac{102691}{1296} - \frac{19}{27}c_4 + \frac{668501}{19440}\pi^2 - \frac{313}{1296}\pi^4 + \frac{13861}{72}\zeta_3 \\
 &\quad - \frac{1439}{216}\zeta_3\pi^2 + \frac{4325}{54}\zeta_5 - \frac{607}{81}\pi^2\log 2 - \frac{16}{27}\pi^2\log^2 2 - \frac{38}{9}\zeta_2\log^2 2 \\
 &\quad + n_l\left(\frac{7867}{2592} + \frac{2}{81}c_4 - \frac{935}{324}\pi^2 + \frac{61}{972}\pi^4 - \frac{6571}{324}\zeta_3 + \frac{5}{6}\zeta_4\right. \\
 &\quad \left. - \frac{260}{81}\zeta_5 - \frac{22}{81}\pi^2\log 2 + \frac{4}{81}\pi^2\log^2 2 + \frac{4}{27}\zeta_2\log^2 2\right) \\
 &\quad + n_l^2\left(-\frac{107}{1944} + \frac{13}{162}\pi^2 + \frac{26}{81}\zeta_3\right), \\
 D_{22}^{(3),a} &= \frac{28009}{288} - \frac{14}{9}\pi^2 - \frac{1067}{12}\zeta_3 - \frac{4}{9}\pi^2\log 2 \\
 &\quad + n_l\left(-\frac{125}{16} + \frac{2}{9}\pi^2 + \frac{40}{9}\zeta_3\right) + n_l^2\left(\frac{67}{648} - \frac{2}{27}\zeta_3\right), \\
 D_{23}^{(3),a} &= -\frac{825}{32} + \frac{131}{54}n_l - \frac{29}{648}n_l^2, \\
 D_{24}^{(3),a} &= \frac{171}{32} - \frac{23}{72}n_l + \frac{1}{216}n_l^2,
 \end{aligned} \tag{A.30}$$

$$\begin{aligned}
 \Pi^{(0),s} &= \frac{3}{16\pi^2} \left[\frac{16}{3} - 2L_z + \frac{1}{z}(-3 + 3L_z) + \frac{1}{z^2} \left(-\frac{9}{8} - \frac{3}{4}L_z \right) \right], \\
 \Pi^{(1),s} &= \frac{3}{16\pi^2} \left[\frac{13}{3} - 6L_z + 2L_z^2 - 8\zeta_3 + \frac{1}{z}(-4 + 4L_z - 6L_z^2 + 12\zeta_3) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{z^2} \left(\frac{10}{3} + \frac{11}{2}L_z + 3L_z^2 - 4\zeta_3 \right) \right],
 \end{aligned} \tag{A.31}$$

$$\begin{aligned}
 D_{00}^{(2),s} &= \frac{1729}{36} + \frac{2}{9}c_4 - \frac{154}{27}\pi^2 - \frac{11}{270}\pi^4 - \frac{2431}{24}\zeta_3 - \frac{1}{2}\zeta_4 + \frac{50}{3}\zeta_5 - \frac{44}{27}\pi^2\log 2 \\
 &\quad - \frac{2}{9}\pi^2\log^2 2 + \frac{4}{3}\zeta_2\log^2 2 + n_l\left(-\frac{107}{54} + \frac{22}{27}\pi^2 + \frac{32}{9}\zeta_3\right), \\
 D_{01}^{(2),s} &= -\frac{715}{9} + \frac{14}{9}\pi^2 + \frac{115}{3}\zeta_3 + \frac{4}{9}\pi^2\log 2 + n_l\left(\frac{31}{9} - \frac{2}{9}\pi^2 - \frac{4}{3}\zeta_3\right), \\
 D_{02}^{(2),s} &= 30 - \frac{11}{9}n_l, \\
 D_{03}^{(2),s} &= -\frac{19}{6} + \frac{1}{9}n_l, \\
 D_{10}^{(2),s} &= -\frac{155}{3} - \frac{4}{9}c_4 + 7\pi^2 + \frac{11}{135}\pi^4 + \frac{1207}{9}\zeta_3 + \zeta_4 - \frac{385}{9}\zeta_5 + 2\pi^2\log 2 \\
 &\quad + \frac{4}{9}\pi^2\log^2 2 - \frac{8}{3}\zeta_2\log^2 2 + n_l\left(\frac{11}{9} - \pi^2 - \frac{14}{3}\zeta_3\right), \\
 D_{11}^{(2),s} &= \frac{179}{2} - \frac{14}{3}\pi^2 - 81\zeta_3 - \frac{4}{3}\pi^2\log 2 + n_l\left(-\frac{25}{9} + \frac{2}{3}\pi^2 + 2\zeta_3\right), \\
 D_{12}^{(2),s} &= -\frac{243}{4} + \frac{5}{2}n_l, \\
 D_{13}^{(2),s} &= \frac{27}{2} - \frac{1}{3}n_l,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 D_{20}^{(2),s} &= \frac{133}{192} + \frac{1}{9}c_4 + \frac{49}{24}\pi^2 + \frac{263}{144}\zeta_3 - \frac{25}{12}\zeta_4 \\
 &\quad + \frac{65}{72}\zeta_5 + \frac{7}{12}\pi^2 \log 2 + n_l \left(-\frac{581}{864} - \frac{7}{24}\pi^2 - \frac{1}{18}\zeta_3 \right), \\
 D_{21}^{(2),s} &= \frac{1201}{96} + \frac{7}{4}\pi^2 + \frac{325}{8}\zeta_3 + \frac{1}{2}\pi^2 \log 2 + n_l \left(-\frac{215}{144} - \frac{1}{4}\pi^2 - \frac{2}{3}\zeta_3 \right), \\
 D_{22}^{(2),s} &= \frac{83}{32} - \frac{35}{48}n_l, \\
 D_{23}^{(2),s} &= -\frac{159}{16} + \frac{5}{24}n_l, \\
 D_{00}^{(3),s} &= \frac{931385923123699}{601974374400} - \frac{5}{72}N_{40903\epsilon 1} + \frac{13}{144}N_{407118\epsilon 1} - \frac{31}{144}N_{407117\epsilon 1} \\
 &\quad + \frac{5}{384}N_{406112\epsilon 3} - \frac{1}{54}N_{406111\epsilon 2} + \frac{17}{144}N_{40602\epsilon 2} - \frac{5}{2048}N_{40505\epsilon 4} \\
 &\quad + \frac{387043}{19440}c_4 + \frac{17368}{27}\text{Li}_5 - \frac{7865071}{29160}\pi^2 - \frac{103201}{583200}\pi^4 + \frac{277}{1008}\pi^6 \\
 &\quad - \frac{4472653223}{2721600}\zeta_3 + \frac{17845}{324}\zeta_3\pi^2 + \frac{1}{36}\zeta_3\pi^4 + \frac{4397}{24}\zeta_3^2 - \frac{1261}{288}\zeta_4 \\
 &\quad - \frac{224471}{288}\zeta_5 + \frac{325}{48}\zeta_6 - \frac{3905}{72}\zeta_7 + \frac{12136}{243}\pi^2 \log 2 + \frac{16931}{2430}\pi^4 \log 2 \\
 &\quad + \frac{16}{9}\zeta_3\pi^2 \log 2 - \frac{202243}{19440}\pi^2 \log^2 2 + \frac{387043}{3240}\zeta_2 \log^2 2 \\
 &\quad + \frac{2171}{243}\pi^2 \log^3 2 - \frac{2171}{405}\log^5 2 + n_l \left(-\frac{23219}{216} - \frac{121}{324}c_4 - \frac{32}{9}\text{Li}_5 \right. \\
 &\quad + \frac{11503}{486}\pi^2 - \frac{8017}{12960}\pi^4 + \frac{130693}{864}\zeta_3 - \frac{8}{9}\zeta_3\pi^2 - \frac{10}{3}\zeta_3^2 - \frac{53}{12}\zeta_4 \\
 &\quad + \frac{1739}{108}\zeta_5 + \frac{484}{243}\pi^2 \log 2 - \frac{49}{810}\pi^4 \log 2 - \frac{55}{324}\pi^2 \log^2 2 - \frac{121}{54}\zeta_2 \log^2 2 \\
 &\quad \left. - \frac{4}{81}\pi^2 \log^3 2 + \frac{4}{135}\log^5 2 \right) + n_l^2 \left(\frac{4541}{1944} - \frac{143}{243}\pi^2 + \frac{7}{1080}\pi^4 - \frac{182}{81}\zeta_3 \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{12}\zeta_4 - \frac{10}{9}\zeta_5 \right), \\
 D_{01}^{(3),s} &= -\frac{293501}{216} - \frac{38}{27}c_4 + \frac{769301}{9720}\pi^2 - \frac{313}{648}\pi^4 + \frac{100669}{108}\zeta_3 \\
 &\quad - \frac{1439}{108}\zeta_3\pi^2 - \frac{2680}{27}\zeta_5 - \frac{974}{81}\pi^2 \log 2 - \frac{32}{27}\pi^2 \log^2 2 - \frac{76}{9}\zeta_2 \log^2 2 \\
 &\quad + n_l \left(\frac{80233}{648} + \frac{4}{81}c_4 - \frac{1175}{162}\pi^2 + \frac{61}{486}\pi^4 - \frac{3731}{54}\zeta_3 + \frac{5}{3}\zeta_4 \right. \\
 &\quad \left. + \frac{50}{9}\zeta_5 - \frac{44}{81}\pi^2 \log 2 + \frac{8}{81}\pi^2 \log^2 2 + \frac{8}{27}\zeta_2 \log^2 2 \right) \\
 &\quad + n_l^2 \left(-\frac{731}{324} + \frac{13}{81}\pi^2 + \frac{32}{27}\zeta_3 \right), \\
 D_{02}^{(3),s} &= \frac{3305}{6} - \frac{14}{9}\pi^2 - \frac{1747}{12}\zeta_3 - \frac{4}{9}\pi^2 \log 2 \\
 &\quad + n_l \left(-\frac{1169}{24} + \frac{2}{9}\pi^2 + \frac{59}{6}\zeta_3 \right) + n_l^2 \left(\frac{275}{324} - \frac{2}{9}\zeta_3 \right),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_{03}^{(3),s} &= -\frac{359}{4} + \frac{799}{108}n_l - \frac{11}{81}n_l^2, \\
D_{04}^{(3),s} &= \frac{95}{16} - \frac{17}{36}n_l + \frac{1}{108}n_l^2, \\
D_{10}^{(3),s} &= -\frac{4790532936689}{8599633920} + \frac{27}{8}N_{40802\epsilon 0} + \frac{5}{36}N_{40903\epsilon 1} - \frac{17}{36}N_{407118\epsilon 1} \\
&\quad + \frac{11}{24}N_{407117\epsilon 1} - \frac{5}{192}N_{406112\epsilon 3} + \frac{7}{54}N_{406111\epsilon 2} - \frac{17}{72}N_{40602\epsilon 2} \\
&\quad + \frac{5}{1024}N_{40505\epsilon 4} - \frac{19993}{324}c_4 - \frac{15856}{9}\text{Li}_5 + \frac{713861}{2160}\pi^2 + \frac{770321}{77760}\pi^4 \\
&\quad - \frac{277}{504}\pi^6 + \frac{56466763}{38880}\zeta_3 - \frac{629}{8}\zeta_3\pi^2 - \frac{1}{18}\zeta_3\pi^4 - \frac{6605}{24}\zeta_3^2 + \frac{1427}{48}\zeta_4 \\
&\quad + \frac{608243}{432}\zeta_5 - \frac{8975}{144}\zeta_6 + \frac{22943}{108}\zeta_7 - \frac{553}{9}\pi^2\log 2 - \frac{15797}{810}\pi^4\log 2 \\
&\quad - \frac{16}{3}\zeta_3\pi^2\log 2 + \frac{16213}{324}\pi^2\log^2 2 - \frac{19993}{54}\zeta_2\log^2 2 \\
&\quad - \frac{1982}{81}\pi^2\log^3 2 + \frac{1982}{135}\log^5 2 + n_l\left(\frac{1907}{36} + \frac{22}{27}c_4 + \frac{64}{9}\text{Li}_5\right. \\
&\quad - \frac{1043}{36}\pi^2 + \frac{12167}{12960}\pi^4 - \frac{14255}{81}\zeta_3 + \frac{8}{3}\zeta_3\pi^2 + \frac{29}{9}\zeta_3^2 + \frac{355}{48}\zeta_4 \\
&\quad - \frac{1307}{162}\zeta_5 - \frac{22}{9}\pi^2\log 2 + \frac{49}{405}\pi^4\log 2 - \frac{4}{27}\pi^2\log^2 2 + \frac{44}{9}\zeta_2\log^2 2 \\
&\quad + \frac{8}{81}\pi^2\log^3 2 - \frac{8}{135}\log^5 2) + n_l^2\left(-\frac{7}{18} + \frac{13}{18}\pi^2 - \frac{7}{360}\pi^4 + \frac{7}{3}\zeta_3\right. \\
&\quad \left.- \frac{1}{4}\zeta_4 + \frac{5}{3}\zeta_5\right), \\
D_{11}^{(3),s} &= \frac{8549}{6} + \frac{38}{9}c_4 - \frac{744101}{3240}\pi^2 + \frac{313}{216}\pi^4 - \frac{31981}{18}\zeta_3 \\
&\quad + \frac{1439}{36}\zeta_3\pi^2 + \frac{7135}{18}\zeta_5 + \frac{1034}{27}\pi^2\log 2 + \frac{32}{9}\pi^2\log^2 2 + \frac{76}{3}\zeta_2\log^2 2 \\
&\quad + n_l\left(-\frac{2840}{27} - \frac{4}{27}c_4 + \frac{1115}{54}\pi^2 - \frac{61}{162}\pi^4 + \frac{6215}{54}\zeta_3 - 5\zeta_4\right. \\
&\quad \left.- \frac{385}{27}\zeta_5 + \frac{44}{27}\pi^2\log 2 - \frac{8}{27}\pi^2\log^2 2 - \frac{8}{9}\zeta_2\log^2 2\right) \\
&\quad + n_l^2\left(\frac{233}{162} - \frac{13}{27}\pi^2 - \frac{14}{9}\zeta_3\right), \\
D_{12}^{(3),s} &= -\frac{2121}{2} + \frac{28}{3}\pi^2 + \frac{1561}{4}\zeta_3 + \frac{8}{3}\pi^2\log 2 \\
&\quad + n_l\left(\frac{1559}{18} - \frac{4}{3}\pi^2 - \frac{55}{3}\zeta_3\right) + n_l^2\left(-\frac{139}{108} + \frac{1}{3}\zeta_3\right), \\
D_{13}^{(3),s} &= \frac{2145}{8} - \frac{689}{36}n_l + \frac{5}{18}n_l^2, \\
D_{14}^{(3),s} &= -\frac{513}{16} + \frac{23}{12}n_l - \frac{1}{36}n_l^2,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 D_{21}^{(3),s} &= \frac{480329}{1728} - \frac{65}{36}c_4 + \frac{623141}{8640}\pi^2 - \frac{313}{576}\pi^4 + \frac{92563}{288}\zeta_3 - \frac{1439}{96}\zeta_3\pi^2 \\
 &\quad + \frac{25}{6}\zeta_4 - \frac{125}{48}\zeta_5 - \frac{661}{36}\pi^2 \log 2 - \frac{4}{3}\pi^2 \log^2 2 - \frac{19}{2}\zeta_2 \log^2 2 \\
 &\quad + n_l \left(-\frac{5549}{192} + \frac{1}{18}c_4 - \frac{827}{144}\pi^2 + \frac{61}{432}\pi^4 - \frac{10633}{432}\zeta_3 + \frac{15}{8}\zeta_4 \right. \\
 &\quad \left. + \frac{65}{216}\zeta_5 - \frac{11}{18}\pi^2 \log 2 + \frac{1}{9}\pi^2 \log^2 2 + \frac{1}{3}\zeta_2 \log^2 2 \right) \\
 &\quad + n_l^2 \left(\frac{15}{32} + \frac{13}{72}\pi^2 + \frac{4}{27}\zeta_3 \right), \\
 D_{22}^{(3),s} &= \frac{15161}{128} - 7\pi^2 - \frac{4119}{16}\zeta_3 - 2\pi^2 \log 2 \\
 &\quad + n_l \left(-\frac{7241}{576} + \pi^2 + \frac{221}{24}\zeta_3 \right) + n_l^2 \left(\frac{197}{864} - \frac{1}{9}\zeta_3 \right), \\
 D_{23}^{(3),s} &= -\frac{5855}{64} + \frac{2405}{288}n_l - \frac{53}{432}n_l^2, \\
 D_{24}^{(3),s} &= \frac{1971}{64} - \frac{77}{48}n_l + \frac{1}{48}n_l^2, \tag{A.32}
 \end{aligned}$$

$$\Pi^{(0),p} = \frac{3}{16\pi^2} \left[4 - 2L_z + \frac{1}{z}(1 + L_z) + \frac{1}{z^2} \left(-\frac{1}{8} + \frac{1}{4}L_z \right) \right], \tag{A.33}$$

$$\begin{aligned}
 \Pi^{(1),p} &= \frac{3}{16\pi^2} \left[\frac{17}{3} - 6L_z + 2L_z^2 - 8\zeta_3 + \frac{1}{z} \left(-\frac{4}{3} - 4L_z - 2L_z^2 + 4\zeta_3 \right) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{z^2} \left(2 + \frac{3}{2}L_z - L_z^2 \right) \right], \tag{A.34}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 D_{00}^{(2),p} &= \frac{710}{9} + \frac{2}{9}c_4 - \frac{14}{3}\pi^2 - \frac{11}{270}\pi^4 - \frac{203}{2}\zeta_3 - \frac{1}{2}\zeta_4 + \frac{50}{3}\zeta_5 - \frac{4}{3}\pi^2 \log 2 \\
 &\quad - \frac{2}{9}\pi^2 \log^2 2 + \frac{4}{3}\zeta_2 \log^2 2 + n_l \left(-\frac{193}{54} + \frac{2}{3}\pi^2 + \frac{32}{9}\zeta_3 \right), \\
 D_{10}^{(2),p} &= \frac{188}{9} - \frac{4}{27}c_4 - \frac{7}{9}\pi^2 + \frac{11}{405}\pi^4 + 24\zeta_3 + \frac{1}{3}\zeta_4 - \frac{235}{9}\zeta_5 - \frac{2}{9}\pi^2 \log 2 \\
 &\quad + \frac{4}{27}\pi^2 \log^2 2 - \frac{8}{9}\zeta_2 \log^2 2 + n_l \left(-\frac{11}{27} + \frac{1}{9}\pi^2 - \frac{10}{9}\zeta_3 \right), \\
 D_{11}^{(2),p} &= -\frac{45}{2} - \frac{14}{9}\pi^2 - 27\zeta_3 - \frac{4}{9}\pi^2 \log 2 + n_l \left(\frac{11}{9} + \frac{2}{9}\pi^2 + \frac{2}{3}\zeta_3 \right), \\
 D_{12}^{(2),p} &= -\frac{9}{4} + \frac{7}{18}n_l, \\
 D_{13}^{(2),p} &= \frac{9}{2} - \frac{1}{9}n_l, \\
 D_{20}^{(2),p} &= \frac{613}{192} - \frac{1}{27}c_4 + \frac{35}{72}\pi^2 + \frac{2183}{144}\zeta_3 + \frac{25}{36}\zeta_4 \\
 &\quad + \frac{55}{24}\zeta_5 + \frac{5}{36}\pi^2 \log 2 + n_l \left(-\frac{151}{288} - \frac{5}{72}\pi^2 - \frac{1}{2}\zeta_3 \right), \\
 D_{21}^{(2),p} &= -\frac{941}{288} - \frac{7}{12}\pi^2 - \frac{37}{24}\zeta_3 - \frac{1}{6}\pi^2 \log 2 + n_l \left(-\frac{13}{48} + \frac{1}{12}\pi^2 \right),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_{22}^{(2),p} &= -\frac{517}{32} + \frac{79}{144}n_l, \\
D_{23}^{(2),p} &= \frac{53}{16} - \frac{5}{72}n_l, \\
D_{00}^{(3),p} &= \frac{29357599511537}{17199267840} - \frac{5}{72}N_{40903\epsilon 1} + \frac{13}{144}N_{407118\epsilon 1} - \frac{31}{144}N_{407117\epsilon 1} \\
&\quad + \frac{5}{384}N_{406112\epsilon 3} - \frac{1}{54}N_{406111\epsilon 2} + \frac{17}{144}N_{40602\epsilon 2} - \frac{5}{2048}N_{40505\epsilon 4} \\
&\quad + \frac{14341}{648}c_4 + \frac{5960}{9}\text{Li}_5 - \frac{723101}{3240}\pi^2 - \frac{178661}{155520}\pi^4 + \frac{277}{1008}\pi^6 \\
&\quad - \frac{126414619}{77760}\zeta_3 + \frac{1663}{36}\zeta_3\pi^2 + \frac{1}{36}\zeta_3\pi^4 + \frac{4397}{24}\zeta_3^2 - \frac{1261}{288}\zeta_4 \\
&\quad - \frac{660197}{864}\zeta_5 + \frac{325}{48}\zeta_6 - \frac{3905}{72}\zeta_7 + \frac{1084}{27}\pi^2\log 2 + \frac{1157}{162}\pi^4\log 2 \\
&\quad + \frac{16}{9}\zeta_3\pi^2\log 2 - \frac{9301}{648}\pi^2\log^2 2 + \frac{14341}{108}\zeta_2\log^2 2 \\
&\quad + \frac{745}{81}\pi^2\log^3 2 - \frac{149}{27}\log^5 2 + n_l\left(-\frac{163057}{1296} - \frac{32}{81}c_4 - \frac{32}{9}\text{Li}_5\right. \\
&\quad + \frac{355}{18}\pi^2 - \frac{5023}{9720}\pi^4 + \frac{16115}{108}\zeta_3 - \frac{8}{9}\zeta_3\pi^2 - \frac{10}{3}\zeta_3^2 - \frac{53}{12}\zeta_4 \\
&\quad + \frac{1739}{108}\zeta_5 + \frac{44}{27}\pi^2\log 2 - \frac{49}{810}\pi^4\log 2 - \frac{4}{81}\pi^2\log^2 2 - \frac{64}{27}\zeta_2\log^2 2 \\
&\quad \left. - \frac{4}{81}\pi^2\log^3 2 + \frac{4}{135}\log^5 2\right) + n_l^2\left(\frac{4801}{1944} - \frac{13}{27}\pi^2 + \frac{7}{1080}\pi^4 - \frac{182}{81}\zeta_3\right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{12}\zeta_4 - \frac{10}{9}\zeta_5\right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 D_{10}^{(3),p} = & \frac{22198186568719}{25798901760} + \frac{9}{8}N_{40802\epsilon 0} + \frac{5}{108}N_{40903\epsilon 1} - \frac{13}{54}N_{407118\epsilon 1} \\
 & + \frac{11}{72}N_{407117\epsilon 1} - \frac{5}{576}N_{406112\epsilon 3} + \frac{23}{324}N_{406111\epsilon 2} - \frac{17}{216}N_{40602\epsilon 2} \\
 & + \frac{5}{3072}N_{40505\epsilon 4} - \frac{835}{36}c_4 - \frac{19312}{27}\text{Li}_5 - \frac{713861}{19440}\pi^2 + \frac{145153}{25920}\pi^4 \\
 & - \frac{277}{1512}\pi^6 - \frac{44109533}{116640}\zeta_3 + \frac{95}{216}\zeta_3\pi^2 - \frac{1}{54}\zeta_3\pi^4 - \frac{17515}{216}\zeta_3^2 + \frac{1823}{144}\zeta_4 \\
 & + \frac{213437}{432}\zeta_5 - \frac{9875}{432}\zeta_6 + \frac{16463}{108}\zeta_7 + \frac{553}{81}\pi^2\log 2 - \frac{19469}{2430}\pi^4\log 2 \\
 & - \frac{16}{9}\zeta_3\pi^2\log 2 + \frac{2645}{108}\pi^2\log^2 2 - \frac{835}{6}\zeta_2\log^2 2 \\
 & - \frac{2414}{243}\pi^2\log^3 2 + \frac{2414}{405}\log^5 2 + n_l\left(-\frac{10003}{324} + \frac{32}{243}c_4 + \frac{64}{27}\text{Li}_5\right. \\
 & + \frac{1043}{324}\pi^2 + \frac{8509}{116640}\pi^4 - \frac{250}{27}\zeta_3 + \frac{8}{9}\zeta_3\pi^2 - \frac{1}{9}\zeta_3^2 + \frac{35}{144}\zeta_4 \\
 & - \frac{629}{162}\zeta_5 + \frac{22}{81}\pi^2\log 2 + \frac{49}{1215}\pi^4\log 2 - \frac{50}{243}\pi^2\log^2 2 + \frac{64}{81}\zeta_2\log^2 2 \\
 & + \frac{8}{243}\pi^2\log^3 2 - \frac{8}{405}\log^5 2\left.) + n_l^2\left(\frac{223}{486} - \frac{13}{162}\pi^2 - \frac{7}{1080}\pi^4 + \frac{7}{81}\zeta_3\right.\right. \\
 & \left. - \frac{1}{12}\zeta_4 + \frac{5}{9}\zeta_5\right), \\
 D_{11}^{(3),p} = & -\frac{18757}{36} + \frac{38}{27}c_4 - \frac{663461}{9720}\pi^2 + \frac{313}{648}\pi^4 - \frac{2255}{6}\zeta_3 \\
 & + \frac{1439}{108}\zeta_3\pi^2 + \frac{4465}{18}\zeta_5 + \frac{1226}{81}\pi^2\log 2 + \frac{32}{27}\pi^2\log^2 2 + \frac{76}{9}\zeta_2\log^2 2 \\
 & + n_l\left(\frac{2369}{54} - \frac{4}{81}c_4 + \frac{923}{162}\pi^2 - \frac{61}{486}\pi^4 + \frac{551}{18}\zeta_3 - \frac{5}{3}\zeta_4 - \frac{235}{27}\zeta_5\right. \\
 & + \frac{44}{81}\pi^2\log 2 - \frac{8}{81}\pi^2\log^2 2 - \frac{8}{27}\zeta_2\log^2 2\left.) + n_l^2\left(-\frac{37}{54} - \frac{13}{81}\pi^2 - \frac{10}{27}\zeta_3\right), \right. \\
 D_{12}^{(3),p} = & -\frac{47}{12} + \frac{28}{9}\pi^2 + \frac{1561}{12}\zeta_3 + \frac{8}{9}\pi^2\log 2 + n_l\left(\frac{215}{54} - \frac{4}{9}\pi^2 - \frac{55}{9}\zeta_3\right) \\
 & + n_l^2\left(-\frac{23}{324} + \frac{1}{9}\zeta_3\right), \\
 D_{13}^{(3),p} = & \frac{259}{8} - \frac{107}{36}n_l + \frac{7}{162}n_l^2, \\
 D_{14}^{(3),p} = & -\frac{171}{16} + \frac{23}{36}n_l - \frac{1}{108}n_l^2,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_{21}^{(3),p} &= \frac{2947}{64} + \frac{65}{108}c_4 - \frac{824741}{25920}\pi^2 + \frac{313}{1728}\pi^4 - \frac{182503}{864}\zeta_3 + \frac{1439}{288}\zeta_3\pi^2 \\
&\quad - \frac{25}{18}\zeta_4 - \frac{15565}{432}\zeta_5 + \frac{421}{108}\pi^2 \log 2 + \frac{4}{9}\pi^2 \log^2 2 + \frac{19}{6}\zeta_2 \log^2 2 \\
&\quad + n_l \left(-\frac{19615}{5184} - \frac{1}{54}c_4 + \frac{1307}{432}\pi^2 - \frac{61}{1296}\pi^4 + \frac{5407}{432}\zeta_3 - \frac{5}{8}\zeta_4 \right. \\
&\quad \left. + \frac{55}{72}\zeta_5 + \frac{11}{54}\pi^2 \log 2 - \frac{1}{27}\pi^2 \log^2 2 - \frac{1}{9}\zeta_2 \log^2 2 \right) \\
&\quad + n_l^2 \left(\frac{23}{288} - \frac{13}{216}\pi^2 - \frac{2}{9}\zeta_3 \right), \\
D_{22}^{(3),p} &= -\frac{176327}{1152} + \frac{7}{3}\pi^2 + \frac{249}{16}\zeta_3 + \frac{2}{3}\pi^2 \log 2 \\
&\quad + n_l \left(\frac{26605}{1728} - \frac{1}{3}\pi^2 + \frac{19}{72}\zeta_3 \right) - \frac{617}{2592}n_l^2, \\
D_{23}^{(3),p} &= \frac{5813}{64} - \frac{557}{96}n_l + \frac{101}{1296}n_l^2, \\
D_{24}^{(3),p} &= -\frac{657}{64} + \frac{77}{144}n_l - \frac{1}{144}n_l^2.
\end{aligned} \tag{A.35}$$

Für die logarithmischen Terme $D_{0m}^{(i),\delta}$ mit $m > 0$ gilt $D_{0m}^{(i),a} = D_{0m}^{(i),v}$ und $D_{0m}^{(i),p} = D_{0m}^{(i),s}$. Die Koeffizienten $D_{20}^{(3),\delta}$ sind bislang unbekannt.

Für die Fouriertransformation in den Ortsraum (siehe Kapitel 3) werden die Koeffizienten $\bar{D}_{0m}^{(i),\delta}$ mit $m > 0$ im $\overline{\text{MS}}$ -Schema benötigt. Für die Polarisationsfunktionen

$$\begin{aligned}
\Pi^t(z) &= \frac{3}{16\pi^2} \sum_{n,m=0}^{\infty} D_{nm}^t \left(\frac{1}{z} \right)^n \log(-4z)^m, \\
\Pi'^t(z) &= \frac{3}{16\pi^2} \sum_{n,m=0}^{\infty} D_{nm}'^t \left(\frac{1}{z} \right)^n \log(-4z)^m
\end{aligned} \tag{A.36}$$

$$\tag{A.37}$$

des Tensorstromkorrelators lauten diese bis zur Vierschleifenordnung [96]

$$\begin{aligned}
\bar{D}_{01}^{(0),t} &= -\frac{2}{3}, \\
\bar{D}_{01}^{(1),t} &= -\frac{14}{27}, \\
\bar{D}_{02}^{(1),t} &= -\frac{2}{9}, \\
\bar{D}_{01}^{(2),t} &= -\frac{9613}{1944} + \frac{143}{27}\zeta_3 + n_l \left(\frac{383}{972} - \frac{4}{9}\zeta_3 \right), \\
\bar{D}_{02}^{(2),t} &= -\frac{92}{81} + \frac{1}{27}n_l,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \bar{D}_{03}^{(2),t} &= \frac{25}{162} - \frac{1}{81}n_l, \\
 \bar{D}_{01}^{(3),t} &= -\frac{3539795}{23328} + \frac{436231}{2916}\zeta_3 - \frac{29}{81}\zeta_4 - \frac{2395}{162}\zeta_5 \\
 &\quad + n_l\left(\frac{87065}{4374} - \frac{4778}{243}\zeta_3 - \frac{5}{27}\zeta_4 + \frac{50}{27}\zeta_5\right) + n_l^2\left(-\frac{32897}{52488} + \frac{134}{243}\zeta_3\right), \\
 \bar{D}_{02}^{(3),t} &= \frac{32315}{5832} - \frac{4031}{324}\zeta_3 + n_l\left(-\frac{269}{216} + \frac{347}{162}\zeta_3\right) + n_l^2\left(\frac{205}{2916} - \frac{2}{27}\zeta_3\right), \\
 \bar{D}_{03}^{(3),t} &= \frac{5627}{2916} - \frac{661}{2916}n_l + \frac{1}{243}n_l^2, \\
 \bar{D}_{04}^{(3),t} &= -\frac{725}{3888} + \frac{1}{36}n_l - \frac{1}{972}n_l^2,
 \end{aligned} \tag{A.38}$$

$$\begin{aligned}
 \bar{D}_{01}^{(0),t} &= \frac{4}{3}, \\
 \bar{D}_{01}^{(1),t} &= \frac{28}{27}, \\
 \bar{D}_{02}^{(1),t} &= \frac{4}{9}, \\
 \bar{D}_{01}^{(2),t} &= \frac{9613}{972} - \frac{286}{27}\zeta_3 + n_l\left(-\frac{383}{486} + \frac{8}{9}\zeta_3\right), \\
 \bar{D}_{02}^{(2),t} &= \frac{184}{81} - \frac{2}{27}n_l, \\
 \bar{D}_{03}^{(2),t} &= -\frac{25}{81} + \frac{2}{81}n_l, \\
 \bar{D}_{01}^{(3),t} &= \frac{3539795}{11664} - \frac{436231}{1458}\zeta_3 + \frac{58}{81}\zeta_4 + \frac{2395}{81}\zeta_5 \\
 &\quad + n_l\left(-\frac{87065}{2187} + \frac{9556}{243}\zeta_3 + \frac{10}{27}\zeta_4 - \frac{100}{27}\zeta_5\right) + n_l^2\left(\frac{32897}{26244} - \frac{268}{243}\zeta_3\right), \\
 \bar{D}_{02}^{(3),t} &= -\frac{32315}{2916} + \frac{4031}{162}\zeta_3 + n_l\left(\frac{269}{108} - \frac{347}{81}\zeta_3\right) + n_l^2\left(-\frac{205}{1458} + \frac{4}{27}\zeta_3\right), \\
 \bar{D}_{03}^{(3),t} &= -\frac{5627}{1458} + \frac{661}{1458}n_l - \frac{2}{243}n_l^2, \\
 \bar{D}_{04}^{(3),t} &= \frac{725}{1944} - \frac{1}{18}n_l + \frac{1}{486}n_l^2.
 \end{aligned} \tag{A.39}$$

Für skalare Ströme und Vektorströme sind die Koeffizienten $D_{0m}^{(i),\delta}$ sogar bis zur Ordnung α_s^4 verfügbar. Die benötigten logarithmischen Beiträge zum Vektorstromkorrelator sind dabei unabhängig vom Schema und können bis zur Vierschleifenordnung aus Gl. (A.25) übernommen werden. Die Fünfschleifenbeiträge

und die Koeffizienten des skalaren Korrelators sind

$$\begin{aligned}
\bar{D}_{01}^{(4),v} &= -\frac{144939499}{15552} + \frac{5693495}{648}\zeta_3 - \frac{1815}{2}\zeta_3^2 - \frac{65945}{216}\zeta_5 + \frac{7315}{36}\zeta_7 \\
&\quad + n_l \left(\frac{13044007}{7776} - \frac{12205}{9}\zeta_3 + \frac{220}{3}\zeta_3^2 - \frac{29675}{324}\zeta_5 - \frac{665}{54}\zeta_7 \right) \\
&\quad + n_l^2 \left(-\frac{1045381}{11664} + \frac{40655}{648}\zeta_3 - \frac{10}{9}\zeta_3^2 + \frac{1040}{81}\zeta_5 \right) \\
&\quad + n_l^3 \left(\frac{6131}{4374} - \frac{203}{243}\zeta_3 - \frac{10}{27}\zeta_5 \right), \\
\bar{D}_{02}^{(4),v} &= \frac{520175}{288} - \frac{12881}{8}\zeta_3 + \frac{3025}{12}\zeta_5 + n_l \left(-\frac{188521}{576} + \frac{9695}{36}\zeta_3 - \frac{275}{9}\zeta_5 \right) \\
&\quad + n_l^2 \left(\frac{94693}{5184} - \frac{257}{18}\zeta_3 + \frac{25}{27}\zeta_5 \right) + n_l^3 \left(-\frac{151}{486} + \frac{19}{81}\zeta_3 \right), \\
\bar{D}_{03}^{(4),v} &= -\frac{49775}{288} + \frac{1331}{12}\zeta_3 + n_l \left(\frac{2263}{72} - \frac{121}{6}\zeta_3 \right) \\
&\quad + n_l^2 \left(-\frac{593}{324} + \frac{11}{9}\zeta_3 \right) + n_l^3 \left(\frac{11}{324} - \frac{2}{81}\zeta_3 \right), \\
\bar{D}_{04}^{(4),v} &= \frac{1331}{192} - \frac{121}{96}n_l + \frac{11}{144}n_l^2 - \frac{1}{648}n_l^3, \\
\bar{D}_{01}^{(0),s} &= -2, \\
\bar{D}_{01}^{(1),s} &= -\frac{34}{3}, \\
\bar{D}_{02}^{(1),s} &= 2, \\
\bar{D}_{01}^{(2),s} &= -\frac{10801}{72} + 39\zeta_3 + n_l \left(\frac{65}{12} - \frac{4}{3}\zeta_3 \right), \\
\bar{D}_{02}^{(2),s} &= \frac{106}{3} - \frac{11}{9}n_l, \\
\bar{D}_{03}^{(2),s} &= -\frac{19}{6} + \frac{1}{9}n_l, \\
\bar{D}_{01}^{(3),s} &= -\frac{6163613}{2592} + \frac{109735}{108}\zeta_3 - \frac{815}{6}\zeta_5 \\
&\quad + n_l \left(\frac{46147}{243} - \frac{524}{9}\zeta_3 + \frac{5}{3}\zeta_4 + \frac{50}{9}\zeta_5 \right) + n_l^2 \left(-\frac{15511}{5832} + \frac{2}{3}\zeta_3 \right), \\
\bar{D}_{02}^{(3),s} &= \frac{49349}{72} - \frac{585}{4}\zeta_3 + n_l \left(-\frac{11651}{216} + \frac{59}{6}\zeta_3 \right) + n_l^2 \left(\frac{275}{324} - \frac{2}{9}\zeta_3 \right), \\
\bar{D}_{03}^{(3),s} &= -\frac{3535}{36} + \frac{277}{36}n_l - \frac{11}{81}n_l^2, \\
\bar{D}_{04}^{(3),s} &= \frac{95}{16} - \frac{17}{36}n_l + \frac{1}{108}n_l^2,
\end{aligned} \tag{A.40}$$

$$\begin{aligned}
\bar{D}_{01}^{(4),s} &= -\frac{10811054729}{248832} + \frac{3887351}{162}\zeta_3 - \frac{458425}{216}\zeta_3^2 - \frac{265}{9}\zeta_4 - \frac{373975}{216}\zeta_5 \\
&\quad + \frac{1375}{16}\zeta_6 + \frac{178045}{384}\zeta_7 + n_l \left(\frac{1045811915}{186624} - \frac{5747185}{2592}\zeta_3 \right. \\
&\quad \left. + \frac{955}{8}\zeta_3^2 + \frac{9131}{288}\zeta_4 - \frac{41215}{216}\zeta_5 - \frac{2875}{144}\zeta_6 - \frac{665}{36}\zeta_7 \right) \\
&\quad + n_l^2 \left(-\frac{220313525}{1119744} + \frac{11875}{216}\zeta_3 - \frac{5}{3}\zeta_3^2 - \frac{25}{48}\zeta_4 + \frac{5015}{216}\zeta_5 \right) \\
&\quad + n_l^3 \left(\frac{520771}{279936} - \frac{65}{216}\zeta_3 - \frac{1}{72}\zeta_4 - \frac{5}{9}\zeta_5 \right), \\
\bar{D}_{02}^{(4),s} &= \frac{49573615}{3456} - \frac{535759}{96}\zeta_3 + \frac{30115}{48}\zeta_5 \\
&\quad + n_l \left(-\frac{56935973}{31104} + \frac{243511}{432}\zeta_3 - \frac{5}{3}\zeta_4 - \frac{1115}{24}\zeta_5 \right) \\
&\quad + n_l^2 \left(\frac{6209245}{93312} - \frac{500}{27}\zeta_3 + \frac{25}{18}\zeta_5 \right) + n_l^3 \left(-\frac{985}{1458} + \frac{5}{27}\zeta_3 \right), \\
\bar{D}_{03}^{(4),s} &= -\frac{4548079}{1728} + \frac{7995}{16}\zeta_3 + n_l \left(\frac{576623}{1728} - \frac{2047}{36}\zeta_3 \right) \\
&\quad + n_l^2 \left(-\frac{197119}{15552} + \frac{259}{108}\zeta_3 \right) + n_l^3 \left(\frac{275}{1944} - \frac{1}{27}\zeta_3 \right), \\
\bar{D}_{04}^{(4),s} &= \frac{51529}{192} - \frac{58843}{1728}n_l + \frac{3529}{2592}n_l^2 - \frac{11}{648}n_l^3, \\
\bar{D}_{05}^{(4),s} &= -\frac{779}{64} + \frac{2249}{1440}n_l - \frac{143}{2160}n_l^2 + \frac{1}{1080}n_l^3.
\end{aligned} \tag{A.41}$$

A.4 Abschätzungen aus Padé-Approximation

Im Folgenden sind die durch Padé-Approximation (vgl. Abschnitt 2.3.1) gewonnenen Abschätzungen für höhere Entwicklungskoeffizienten im Niederenergie-, Schwellen- und Hochenergiebereich für die vier betrachteten Stromkorrelatoren aufgeführt [35]. In den Tabellen A.1 bis A.4 sind die Entwicklungskoeffizienten im On-shell-Schema angegeben. Für die Momente der Niederenergieentwicklung sind in den Tabellen A.5 bis A.8 zusätzlich die Ergebnisse im $\overline{\text{MS}}$ -Schema aufgeführt.

	$n_l = 3$	$n_l = 4$	$n_l = 5$
$C_1^{(3),v}$	366,1748	308,0188	252,8399
$C_2^{(3),v}$	381,5091	330,5835	282,0129
$C_3^{(3),v}$	385,2331	338,7065	294,2224
$C_4^{(3),v}$	383,073(11)	339,913(10)	298,576(9)
$C_5^{(3),v}$	378,688(32)	338,233(32)	299,433(27)
$C_6^{(3),v}$	373,536(61)	335,320(63)	298,622(54)
$C_7^{(3),v}$	368,23(9)	331,90(10)	296,99(9)
$C_8^{(3),v}$	363,03(13)	328,33(14)	294,94(12)
$C_9^{(3),v}$	358,06(17)	324,78(18)	292,72(16)
$C_{10}^{(3),v}$	353,35(20)	321,31(22)	290,44(19)
$K_0^{(3),v}$	17(11)	17(29)	16(10)
$D_2^{(3),v}$	2,0(42)	1,2(83)	1,4(21)

Tabelle A.1: Aus der rekonstruierten Vektorpolarisationsfunktion gewonnene Entwicklungskoeffizienten im On-shell-Schema. Die führenden drei Niederenergiemomente sind exakt bekannt. Die Fehler beziehen sich jeweils auf die letzten zwei Stellen, d.h. 2,0(42) bedeutet einen Fehler von 4,2.

	$n_l = 3$	$n_l = 4$	$n_l = 5$
$C_1^{(3),p}$	16,0615	8,6753	2,0489
$C_2^{(3),p}$	230,9502	199,8289	170,2403
$C_3^{(3),p}$	320,5093	283,8922	248,8971
$C_4^{(3),p}$	359,1116	321,5253	285,5120
$C_5^{(3),p}$	376,3673(23)	339,2386(21)	303,6025(20)
$C_6^{(3),p}$	383,6206(84)	347,4338(75)	312,6556(70)
$C_7^{(3),p}$	385,794(18)	350,695(17)	316,925(16)
$C_8^{(3),p}$	385,250(32)	351,252(29)	318,511(28)
$C_9^{(3),p}$	383,215(48)	350,278(44)	318,533(42)
$C_{10}^{(3),p}$	380,360(66)	348,424(61)	317,620(58)
$K_0^{(3),p}$	2(76)	8(27)	11(42)
$D_2^{(3),p}$	4,98(57)	4,11(48)	3,46(45)

Tabelle A.2: Aus der rekonstruierten pseudoskalaren Polarisationsfunktion gewonnene Entwicklungskoeffizienten im On-shell-Schema. Die führenden vier Niederenergiemomente sind exakt bekannt.

	$n_l = 3$	$n_l = 4$	$n_l = 5$
$C_1^{(3),a}$	165,1328	138,1938	112,7427
$C_2^{(3),a}$	105,1185	90,0956	75,8274
$C_3^{(3),a}$	75,5564	65,5198	55,9690
$C_4^{(3),a}$	57,7298(29)	50,4287(42)	43,4720(39)
$C_5^{(3),a}$	46,005(9)	40,397(13)	35,048(12)
$C_6^{(3),a}$	37,813(17)	33,338(24)	29,065(22)
$C_7^{(3),a}$	31,825(25)	28,151(36)	24,639(33)
$C_8^{(3),a}$	27,291(34)	24,206(48)	21,255(44)
$C_9^{(3),a}$	23,759(42)	21,123(59)	18,599(54)
$C_{10}^{(3),a}$	20,943(49)	18,658(69)	16,468(63)
$K_0^{(3),a}$	16,68(25)	14,28(48)	11,91(37)
$D_2^{(3),a}$	1,69(27)	1,26(38)	0,83(34)

Tabelle A.3: Aus der rekonstruierten Axialvektorpolarisationsfunktion gewonnene Entwicklungskoeffizienten im On-shell-Schema.

	$n_l = 3$	$n_l = 4$	$n_l = 5$
$C_1^{(3),s}$	-2,0665	-3,9663	-5,3866
$C_2^{(3),s}$	59,9301	49,7941	40,2628
$C_3^{(3),s}$	69,5687	59,9811	50,8880
$C_4^{(3),s}$	64,641(14)	56,534(14)	48,819(13)
$C_5^{(3),s}$	57,168(43)	50,399(41)	43,946(39)
$C_6^{(3),s}$	50,069(81)	44,374(76)	38,941(73)
$C_7^{(3),s}$	43,95(12)	39,10(12)	34,47(111)
$C_8^{(3),s}$	38,81(16)	34,64(15)	30,65(149)
$C_9^{(3),s}$	34,52(20)	30,89(19)	27,41(184)
$C_{10}^{(3),s}$	30,93(24)	27,73(22)	24,67(216)
$K_0^{(3),s}$	17,4(11)	14,9(11)	12,6(12)
$D_2^{(3),s}$	7,7(10)	6,3(9)	5,1(8)

Tabelle A.4: Aus der rekonstruierten skalaren Polarisationsfunktion gewonnene Entwicklungskoeffizienten im On-shell-Schema.

	$n_l = 3$	$n_l = 4$	$n_l = 5$
$\bar{C}_1^{(3),v}$	-5,6404	-7,7624	-9,6923
$\bar{C}_2^{(3),v}$	-3,4937	-2,6438	-1,8258
$\bar{C}_3^{(3),v}$	-2,8395	-1,1745	0,4113
$\bar{C}_4^{(3),v}$	-3,349(11)	-1,386(10)	0,471(9)
$\bar{C}_5^{(3),v}$	-3,737(32)	-1,754(32)	0,104(27)
$\bar{C}_6^{(3),v}$	-3,735(61)	-1,910(63)	-0,228(54)
$\bar{C}_7^{(3),v}$	-3,39(10)	-1,85(10)	-0,46(9)
$\bar{C}_8^{(3),v}$	-2,85(13)	-1,67(14)	-0,66(12)
$\bar{C}_9^{(3),v}$	-2,22(17)	-1,47(18)	-0,91(16)
$\bar{C}_{10}^{(3),v}$	-1,65(20)	-1,37(22)	-1,30(19)

Tabelle A.5: Aus der rekonstruierten Vektorpolarisationsfunktion gewonnene Entwicklungskoeffizienten im $\overline{\text{MS}}$ -Schema bei der Skala $\mu = m_q$.

	$n_l = 3$	$n_l = 4$	$n_l = 5$
$\bar{C}_1^{(3),p}$	-1,2224	-7,2260	-12,4695
$\bar{C}_2^{(3),p}$	7,0659	6,0605	5,1954
$\bar{C}_3^{(3),p}$	14,5789	14,8438	15,1394
$\bar{C}_4^{(3),p}$	13,3278	14,3313	15,3164
$\bar{C}_5^{(3),p}$	9,9948(23)	11,4153(21)	12,7852(19)
$\bar{C}_6^{(3),p}$	6,8011(84)	8,3991(75)	9,9221(70)
$\bar{C}_7^{(3),p}$	4,311(18)	5,907(17)	7,408(16)
$\bar{C}_8^{(3),p}$	2,548(32)	4,008(29)	5,356(28)
$\bar{C}_9^{(3),p}$	1,373(48)	2,594(44)	3,690(42)
$\bar{C}_{10}^{(3),p}$	0,612(66)	1,517(61)	2,285(58)

Tabelle A.6: Aus der rekonstruierten pseudoskalaren Polarisationsfunktion gewonnene Entwicklungskoeffizienten im $\overline{\text{MS}}$ -Schema bei der Skala $\mu = m_q$.

	$n_l = 3$	$n_l = 4$	$n_l = 5$
$\bar{C}_1^{(3),a}$	-2,4297	-2,6606	-2,7958
$\bar{C}_2^{(3),a}$	-3,8059	-2,8384	-1,9120
$\bar{C}_3^{(3),a}$	-2,6066	-1,7770	-0,9920
$\bar{C}_4^{(3),a}$	-1,7688(29)	-1,1387(42)	-0,5498(39)
$\bar{C}_5^{(3),a}$	-1,144(9)	-0,692(13)	-0,278(12)
$\bar{C}_6^{(3),a}$	-0,678(17)	-0,376(24)	-0,109(22)
$\bar{C}_7^{(3),a}$	-0,344(25)	-0,166(36)	-0,022(33)
$\bar{C}_8^{(3),a}$	-0,121(34)	-0,047(48)	-0,004(44)
$\bar{C}_9^{(3),a}$	0,009(42)	-0,004(59)	-0,046(54)
$\bar{C}_{10}^{(3),a}$	0,061(49)	-0,024(69)	-0,138(63)

Tabelle A.7: Aus der rekonstruierten Axialvektorpolarisationsfunktion gewonnene Entwicklungskoeffizienten im $\overline{\text{MS}}$ -Schema bei der Skala $\mu = m_q$.

	$n_l = 3$	$n_l = 4$	$n_l = 5$
$\bar{C}_1^{(3),s}$	-5,4135	-7,0456	-8,1981
$\bar{C}_2^{(3),s}$	-12,9598	-11,6485	-10,3292
$\bar{C}_3^{(3),s}$	-6,6011	-5,4063	-4,2477
$\bar{C}_4^{(3),s}$	-3,972(14)	-3,002(14)	-2,073(13)
$\bar{C}_5^{(3),s}$	-2,665(43)	-1,903(41)	-1,181(39)
$\bar{C}_6^{(3),s}$	-1,843(81)	-1,265(76)	-0,723(73)
$\bar{C}_7^{(3),s}$	-1,26(12)	-0,84(12)	-0,45(11)
$\bar{C}_8^{(3),s}$	-0,82(16)	-0,54(15)	-0,29(15)
$\bar{C}_9^{(3),s}$	-0,51(20)	-0,35(19)	-0,22(18)
$\bar{C}_{10}^{(3),s}$	-0,30(24)	-0,25(22)	-0,22(22)

Tabelle A.8: Aus der rekonstruierten skalaren Polarisationsfunktion gewonnene Entwicklungskoeffizienten im $\overline{\text{MS}}$ -Schema bei der Skala $\mu = m_q$.

A.5 Die Baker-Gammel-Wills-Vermutung

Die ursprüngliche Baker-Gammel-Wills-Vermutung [77] lautet folgendermaßen: Gegeben sei die Potenzreihe $P(z)$ einer Funktion $f(z)$. $f(z)$ sei analytisch und eindeutig für $z \leq 1$ mit Ausnahme von M Polen im Inneren und dem Punkt $z = +1$. Ferner sei $f(z)$ in Bezug auf Punkte mit $z \leq 1$ stetig bei $z = +1$. \mathcal{G} sei das Gebiet, das sich durch Herausschneiden von kleinen Kreisen ergibt, deren Zentren auf den Polstellen liegen. Dann konvergiert in \mathcal{G} zumindest eine Teilfolge der diagonalen Padé-Approximanten $[m/m](z)$ für $m \rightarrow \infty$ gleichförmig gegen $f(z)$.

Bedauerlicherweise erfüllen die in dieser Arbeit betrachteten Koeffizienten der Polarisationsfunktionen als Funktionen von ω die Voraussetzungen dieser Vermutung nicht, da sie der Forderung der Analytizität und Eindeutigkeit auf dem Rand des Kreises nicht genügen. Zudem sind mittlerweile Gegenbeispiele zur Baker-Gammel-Wills-Vermutung bekannt [112]. Da nach Subtraktion der bekannten logarithmischen Anteile der Polarisationsfunktionen die Voraussetzungen jedoch annähernd erfüllt sind und nur bislang nur wenige Gegenbeispiele zur Vermutung existieren, scheint es plausibel, dass das Konvergenzverhalten auch für die hier interessierenden Funktionen gut ist.

Anhang B

Nichtdiagonale Korrelatoren

Im Folgenden sind die Ergebnisse für die in dieser Arbeit berechneten Dreischleifenbeiträge zu den nichtdiagonalen Korrelatoren als Funktionen von $z = q^2/m_q^2$ aufgeführt.

B.1 Niederenergieentwicklung

Im Niederenergiebereich gilt für die nichtdiagonalen Korrelatoren die Entwicklung

$$\Pi_{\text{nd}}^\delta(z) = \frac{3}{16\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} C_n^\delta z^n \quad (\text{B.1})$$

mit $\delta \in \{v, s\}$. Auf Dreischleifenniveau treten zum ersten Mal Korrekturen auf, die proportional zur Zahl der aktiven Quarks sind. $C_n^{(2),\delta}[n_h]$ bezeichnet die Beiträge, die proportional zur Zahl der massiven Quarks mit Masse m_q sind, $C_n^{(2),\delta}[n_l]$ steht für die Beiträge der masselosen Quarks. Die restlichen Dreischleifenkorrekturen ergeben $\bar{C}_n^{(2),v}[1]$. In [5] wurden die Dreischleifenmomente bis $n = 6$ bzw. $n = 7$ berechnet. Die Momente bis $n = 30$ wurden im Rahmen dieser Arbeit bestimmt; sie sind in numerischer Form in den Tabellen B.1 bis B.4 angegeben.

n	$\bar{C}_n^{(0),v}$	$\bar{C}_n^{(1),v}$	$\bar{C}_n^{(2),v}[1]$	$\bar{C}_n^{(2),v}[n_h]$	$\bar{C}_n^{(2),v}[n_l]$
1	0,5	0,457734	-1,51195	0,0166564	0,337837
2	0,133333	-0,048308	-0,840974	-0,0369934	0,187255
3	0,0555556	-0,115602	-0,665554	-0,0289884	0,135615
4	0,0285714	-0,115219	-0,475376	-0,0213752	0,104474
5	0,0166667	-0,102152	-0,309702	-0,0161172	0,0832408
6	0,010582	-0,0880811	-0,177592	-0,0125094	0,067963
7	0,00714286	-0,0756354	-0,0753998	-0,00996452	0,0565728
8	0,00505051	-0,0651894	0,00291844	-0,00811379	0,0478459
9	0,0037037	-0,0565463	0,0628596	-0,00672995	0,0410083
10	0,0027972	-0,0494003	0,108797	-0,00566985	0,0355496
11	0,0021645	-0,0434648	0,144058	-0,00484063	0,031121
12	0,0017094	-0,0385013	0,171144	-0,00418016	0,0274778
13	0,00137363	-0,0343196	0,191926	-0,00364579	0,024444
14	0,00112045	-0,0307699	0,207816	-0,00320745	0,0218902
15	0,000925926	-0,0277347	0,219882	-0,0028435	0,0197199
16	0,000773994	-0,0251214	0,22894	-0,00253805	0,0178596
17	0,000653595	-0,0228568	0,23562	-0,00227923	0,0162527
18	0,000556948	-0,0208824	0,240408	-0,00205802	0,0148551
19	0,000478469	-0,0191512	0,243686	-0,00186749	0,0136316
20	0,000414079	-0,0176253	0,245754	-0,00170221	0,0125545
21	0,00036075	-0,0162738	0,24685	-0,00155793	0,0116011
22	0,000316206	-0,0150713	0,247164	-0,00143123	0,0107532
23	0,000278707	-0,0139968	0,246847	-0,00131937	0,00999562
24	0,000246914	-0,0130328	0,246023	-0,00122012	0,00931596
25	0,00021978	-0,0121648	0,24479	-0,00113166	0,00870382
26	0,000196483	-0,0113806	0,243229	-0,00105247	0,00815053
27	0,000176367	-0,0106696	0,241406	-0,000981314	0,00764873
28	0,000158907	-0,0100231	0,239376	-0,000917133	0,0071922
29	0,000143678	-0,00943357	0,237182	-0,000859046	0,00677564
30	0,000130336	-0,00889448	0,234861	-0,000806306	0,00639448

Tabelle B.1: $\overline{\text{MS}}$ -Ergebnisse für die Momente des nichtdiagonalen Vektorkorrelators.

n	$C_n^{(0),v}$	$C_n^{(1),v}$	$C_n^{(2),v}[1]$	$C_n^{(2),v}[n_h]$	$C_n^{(2),v}[n_l]$
1	0,5	1,79107	13,9374	0,120224	-0,70353
2	0,133333	0,662803	7,43818	0,0182424	-0,368141
3	0,0555556	0,328843	4,33772	0,00553401	-0,211507
4	0,0285714	0,189542	2,76694	0,00229732	-0,133553
5	0,0166667	0,12007	1,88491	0,00114399	-0,0903203
6	0,010582	0,0812311	1,34868	0,000642015	-0,0642741
7	0,00714286	0,057698	1,00228	0,000392196	-0,0475638
8	0,00505051	0,0425547	0,767618	0,000255268	-0,036305
9	0,0037037	0,0323425	0,602477	0,000174529	-0,0284161
10	0,0027972	0,0251917	0,482571	0,000124113	-0,0227087
11	0,0021645	0,0200273	0,39321	0,0000911431	-0,0184679
12	0,0017094	0,0161996	0,325124	0,0000687454	-0,0152449
13	0,00137363	0,0132995	0,272254	0,0000530367	-0,0127477
14	0,00112045	0,0110602	0,230519	0,0000417163	-0,0107802
15	0,000925926	0,00930234	0,197094	0,0000333657	-0,00920699
16	0,000773994	0,0079023	0,169981	0,0000270793	-0,00793277
17	0,000653595	0,00677283	0,147737	0,0000222619	-0,00688875
18	0,000556948	0,00585114	0,129302	0,0000185115	-0,00602447
19	0,000478469	0,00509123	0,113881	0,0000155505	-0,00530231
20	0,000414079	0,00445887	0,100876	0,0000131832	-0,00469381
21	0,00036075	0,0039282	0,0898235	0,0000112689	-0,00417715
22	0,000316206	0,00347942	0,0803661	$9,70504 \cdot 10^{-6}$	-0,00373538
23	0,000278707	0,00309724	0,0722219	$8,41541 \cdot 10^{-6}$	-0,00335524
24	0,000246914	0,00276964	0,0651675	$7,34283 \cdot 10^{-6}$	-0,00302617
25	0,00021978	0,00248717	0,059024	$6,44376 \cdot 10^{-6}$	-0,00273977
26	0,000196483	0,00224226	0,0536469	$5,68469 \cdot 10^{-6}$	-0,00248924
27	0,000176367	0,00202882	0,0489187	$5,03955 \cdot 10^{-6}$	-0,00226905
28	0,000158907	0,00184192	0,0447429	$4,48785 \cdot 10^{-6}$	-0,00207469
29	0,000143678	0,00167755	0,0410402	$4,01335 \cdot 10^{-6}$	-0,00190242
30	0,000130336	0,00153237	0,0377444	$3,60308 \cdot 10^{-6}$	-0,00174915

Tabelle B.2: On-shell-Ergebnisse für die Momente des nichtdiagonalen Vektorkorrelators.

n	$\bar{C}_n^{(0),s}$	$\bar{C}_n^{(1),s}$	$\bar{C}_n^{(2),s}[1]$	$\bar{C}_n^{(2),s}[n_h]$	$\bar{C}_n^{(2),s}[n_l]$
1	0,666667	1,57327	1,96474	0,318385	0,10395
2	0,166667	0,448874	1,88733	0,0227548	0,0482836
3	0,0666667	0,105476	0,568422	-0,0101555	0,0611662
4	0,0333333	-0,00220046	0,0533308	-0,0135235	0,061822
5	0,0190476	-0,0379241	-0,105391	-0,0122232	0,057017
6	0,0119048	-0,0485967	-0,127296	-0,0103375	0,0508702
7	0,00793651	-0,0498615	-0,0996777	-0,00864624	0,0448949
8	0,00555556	-0,0475535	-0,0570883	-0,00726096	0,0395564
9	0,0040404	-0,0440122	-0,0131535	-0,00615011	0,0349359
10	0,0030303	-0,0402101	0,0270349	-0,00525962	0,0309825
11	0,002331	-0,0365484	0,0619251	-0,00454077	0,0276087
12	0,0018315	-0,0331799	0,091418	-0,00395496	0,0247245
13	0,0014652	-0,0301469	0,115973	-0,00347273	0,0222496
14	0,00119048	-0,0274437	0,13622	-0,00307183	0,0201158
15	0,000980392	-0,0250447	0,152798	-0,00273539	0,0182666
16	0,000816993	-0,0229181	0,166288	-0,00245059	0,0166558
17	0,000687994	-0,0210316	0,177197	-0,00220754	0,0152455
18	0,000584795	-0,0193549	0,185954	-0,00199858	0,0140045
19	0,000501253	-0,0178613	0,192917	-0,00181768	0,0129074
20	0,0004329	-0,016527	0,198387	-0,0016601	0,0119333
21	0,000376435	-0,0153315	0,202612	-0,00152201	0,0110646
22	0,000329381	-0,0142573	0,205797	-0,00140036	0,0102869
23	0,000289855	-0,0132893	0,208115	-0,00129266	0,00958805
24	0,00025641	-0,0124143	0,209706	-0,00119686	0,0089578
25	0,00022792	-0,0116212	0,21069	-0,00111129	0,00838756
26	0,0002035	-0,0109004	0,211165	-0,00103454	0,00786998
27	0,000182448	-0,0102435	0,211213	-0,000965442	0,0073988
28	0,000164204	-0,00964344	0,210905	-0,000903023	0,00696868
29	0,000148313	-0,0090939	0,210299	-0,000846448	0,00657499
30	0,000134409	-0,00858947	0,209443	-0,000795014	0,00621375

Tabelle B.3: $\overline{\text{MS}}$ -Ergebnisse für die Momente des nichtdiagonalen skalaren Korrelators.

n	$C_n^{(0),s}$	$C_n^{(1),s}$	$C_n^{(2),s}[1]$	$C_n^{(2),s}[n_h]$	$C_n^{(2),s}[n_l]$
1	0,666667	1,57327	1,96474	0,318385	0,10395
2	0,166667	0,893319	7,82723	0,0572772	-0,298839
3	0,0666667	0,461031	5,39936	0,0174624	-0,216532
4	0,0333333	0,264466	3,59258	0,00718989	-0,146451
5	0,0190476	0,165251	2,47097	0,00355842	-0,101667
6	0,0119048	0,110133	1,7652	0,00199191	-0,073102
7	0,00793651	0,0771226	1,30422	0,0012173	-0,0542829
8	0,00555556	0,0561502	0,991555	0,000794262	-0,0414388
9	0,0040404	0,0421831	0,772245	0,000545139	-0,0323848
10	0,0030303	0,0325172	0,613862	0,000389501	-0,0258193
11	0,002331	0,0256116	0,496564	0,000287535	-0,0209399
12	0,0018315	0,0205442	0,40778	0,000218073	-0,0172353
13	0,0014652	0,0167395	0,33929	0,000169189	-0,0143699
14	0,00119048	0,0138262	0,285569	0,000133824	-0,012117
15	0,000980392	0,0115566	0,24281	0,000107627	-0,0103199
16	0,000816993	0,00976161	0,208328	0,0000878208	-0,00886787
17	0,000687994	0,00832286	0,180196	0,0000725749	-0,00768109
18	0,000584795	0,00715578	0,157002	0,0000606529	-0,00670105
19	0,000501253	0,00619887	0,137698	0,0000511984	-0,00588414
20	0,0004329	0,00540666	0,121493	0,0000436063	-0,00519742
21	0,000376435	0,00474501	0,107783	0,0000374408	-0,00461567
22	0,000329381	0,00418797	0,096101	0,0000323825	-0,00411935
23	0,000289855	0,00371556	0,0860806	0,0000281942	-0,00369316
24	0,00025641	0,00331222	0,0774336	0,0000246968	-0,00332498
25	0,00022792	0,00296571	0,0699299	0,0000217539	-0,00300517
26	0,0002035	0,00266631	0,0633845	0,0000192599	-0,00272594
27	0,000182448	0,00240624	0,0576474	0,0000171325	-0,00248098
28	0,000164204	0,00217922	0,0525962	0,0000153069	-0,00226512
29	0,000148313	0,00198014	0,0481302	0,0000137314	-0,00207411
30	0,000134409	0,00180479	0,044166	0,0000123646	-0,00190444

Tabelle B.4: On-shell-Ergebnisse für die Momente des nichtdiagonalen skalaren Korrelators.

B.2 Hochenergieentwicklung

Die Hochenergieentwicklung der nichtdiagonalen Korrelatoren lautet

$$\Pi_{\text{nd}}^{\delta}(z) = \sum_{n,m=0}^{\infty} H_{nm}^{\delta} \left(\frac{1}{z}\right)^n \log(-z)^m \quad (\text{B.2})$$

mit

$$H_{nm}^{\delta} = \frac{3}{16\pi^2} D_{nm}^{\delta} . \quad (\text{B.3})$$

Die Ergebnisse für die Hochenergiekoeffizienten bis zur Dreischleifenordnung und $n \leq 6$ bzw. $n \leq 7$ finden sich in [4]. Die neu berechneten Koeffizienten mit $n \geq 7$ sind in den Tabellen B.5 bis B.12 in numerischer Form aufgeführt. $D_{n2}^{(2),v}[n_h]$ und $D_{n2}^{(2),v}[n_l]$ bezeichnen den zur Zahl der massiven bzw. masselosen Quarks proportionalen Anteil; $D_{n2}^{(2),v}[1]$ steht für den verbleibenden Dreischleifenbeitrag.

n	$D_n^{(0),v}$	$D_n^{(1),v}$	$D_{n1}^{(1),v}$	$D_{n2}^{(1),v}$
7	0,000452327	0,00110124	-0,00170017	-0,000301551
8	0,000271396	0,000830190	-0,000941701	-0,000180931
9	0,000175905	0,000614835	-0,000574250	-0,000117270
10	0,000120620	0,000461501	-0,000375200	-0,0000804136
11	0,0000863533	0,000353289	-0,000258246	-0,0000575689
12	0,0000639654	0,000275840	-0,000185134	-0,0000426436
13	0,0000487121	0,000219314	-0,000137136	-0,0000324747
14	0,0000379575	0,000177222	-0,000104350	-0,0000253050
15	0,0000301551	0,000145284	-0,0000812089	-0,0000201034
16	0,0000243561	0,000120628	-0,0000644172	-0,0000162374
17	0,0000199556	0,000101295	-0,0000519423	-0,0000133037
18	0,0000165557	0,0000859228	-0,0000424841	-0,0000110372
19	0,0000138872	0,0000735439	-0,0000351846	$-9,25815 \cdot 10^{-6}$
20	0,0000117633	0,0000634615	-0,0000294626	$-7,84220 \cdot 10^{-6}$
21	0,0000100517	0,0000551642	-0,0000249146	$-6,70114 \cdot 10^{-6}$
22	$8,65697 \cdot 10^{-6}$	0,0000482717	-0,0000212547	$-5,77131 \cdot 10^{-6}$
23	$7,50898 \cdot 10^{-6}$	0,0000424971	-0,0000182767	$-5,00599 \cdot 10^{-6}$
24	$6,55546 \cdot 10^{-6}$	0,0000376211	-0,0000158291	$-4,37031 \cdot 10^{-6}$
25	$5,75689 \cdot 10^{-6}$	0,0000334742	-0,0000137990	$-3,83792 \cdot 10^{-6}$
26	$5,08300 \cdot 10^{-6}$	0,0000299242	-0,0000121012	$-3,38867 \cdot 10^{-6}$
27	$4,51038 \cdot 10^{-6}$	0,0000268664	-0,0000106705	$-3,00692 \cdot 10^{-6}$
28	$4,02068 \cdot 10^{-6}$	0,0000242179	$-9,45645 \cdot 10^{-6}$	$-2,68045 \cdot 10^{-6}$
29	$3,59942 \cdot 10^{-6}$	0,0000219117	$-8,41954 \cdot 10^{-6}$	$-2,39961 \cdot 10^{-6}$
30	$3,23503 \cdot 10^{-6}$	0,0000198939	$-7,52865 \cdot 10^{-6}$	$-2,15669 \cdot 10^{-6}$

Tabelle B.5: Koeffizienten in der Hochenergieentwicklung der Vektorpolarisationsfunktion im On-shell-Schema bis zur Zweischleifenordnung.

n	$D_n^{(2),v}[1]$	$D_{n1}^{(2),v}[1]$	$D_{n2}^{(2),v}[1]$	$D_{n3}^{(2),v}[1]$
7	-0,503256	-0,169804	0,190211	-0,0188269
8	-1,21637	-0,809964	0,563975	-0,0323494
9	-3,22936	-3,60378	1,80578	-0,0545926
10	-9,31055	-15,7855	6,44795	-0,0940592
11	-29,2746	-71,8186	25,7898	-0,163961
12	-99,6095	-344,647	114,015	-0,290201
13	-360,132	-1745,77	546,953	-0,519492
14	-1347,05	-9285,36	2799,77	-0,939799
15	-5023,73	-51522,2	15095,4	-1,71479
16	-17526,4	-296464	84914,1	-3,15239
17	-47971,2	-1,76011·10 ⁶	494863	-5,83208
18	-2698,75	-1,07375·10 ⁷	2,97215·10 ⁶	-10,8495
19	1,54261·10 ⁶	-6,70810·10 ⁷	1,83216·10 ⁷	-20,2804
20	1,85140·10 ⁷	-4,27979·10 ⁸	1,15543·10 ⁸	-38,0696
21	1,69982·10 ⁸	-2,78208·10 ⁹	7,43478·10 ⁸	-71,7300
22	1,41494·10 ⁹	-1,83905·10 ¹⁰	4,87053·10 ⁹	-135,602
23	1,12440·10 ¹⁰	-1,23419·10 ¹¹	3,24241·10 ¹⁰	-257,111
24	8,72037·10 ¹⁰	-8,39680·10 ¹¹	2,19009·10 ¹¹	-488,810
25	6,67473·10 ¹¹	-5,78442·10 ¹²	1,49890·10 ¹²	-931,563
26	5,07380·10 ¹²	-4,03049·10 ¹³	1,03824·10 ¹³	-1779,27
27	3,84460·10 ¹³	-2,83792·10 ¹⁴	7,27093·10 ¹³	-3405,22
28	2,91069·10 ¹⁴	-2,01757·10 ¹⁵	5,14362·10 ¹⁴	-6529,06
29	2,20501·10 ¹⁵	-1,44720·10 ¹⁶	3,67275·10 ¹⁵	-12539,9
30	1,67306·10 ¹⁶	-1,04669·10 ¹⁷	2,64518·10 ¹⁶	-24122,1

Tabelle B.6: Koeffizienten des Dreischleifenbeitrags in der Hochenergieentwicklung der Vektorpolarisationsfunktion im On-shell-Schema für $n_h = n_l = 0$.

n	$D_n^{(2),v}[n_h]$	$D_{n1}^{(2),v}[n_h]$	$D_{n2}^{(2),v}[n_h]$	$D_{n3}^{(2),v}[n_h]$
7	-1,24281	-0,598319	0,535984	-0,0415336
8	-3,12032	-3,05683	1,64810	-0,0507008
9	-8,38078	-13,5956	5,61845	-0,0596662
10	-25,0858	-61,4288	21,9392	-0,0685035
11	-83,3006	-293,336	96,3580	-0,0772546
12	-298,092	-1485,12	462,828	-0,0859449
13	-1107,78	-7916,92	2378,05	-0,0945907
14	-4089,05	-44083,3	12877,1	-0,103203
15	-13918,6	-254665	72751,2	-0,111790
16	-34943,0	$-1,51808 \cdot 10^6$	425789	-0,120356
17	35116,8	$-9,29807 \cdot 10^6$	$2,56789 \cdot 10^6$	-0,128906
18	$1,56392 \cdot 10^6$	$-5,83138 \cdot 10^7$	$1,58929 \cdot 10^7$	-0,137443
19	$1,75058 \cdot 10^7$	$-3,73432 \cdot 10^8$	$1,00613 \cdot 10^8$	-0,145969
20	$1,57177 \cdot 10^8$	$-2,43614 \cdot 10^9$	$6,49786 \cdot 10^8$	-0,154485
21	$1,29535 \cdot 10^9$	$-1,61585 \cdot 10^{10}$	$4,27167 \cdot 10^9$	-0,162994
22	$1,02423 \cdot 10^{10}$	$-1,08790 \cdot 10^{11}$	$2,85322 \cdot 10^{10}$	-0,171497
23	$7,92334 \cdot 10^{10}$	$-7,42424 \cdot 10^{11}$	$1,93331 \cdot 10^{11}$	-0,179994
24	$6,05762 \cdot 10^{11}$	$-5,12934 \cdot 10^{12}$	$1,32714 \cdot 10^{12}$	-0,188486
25	$4,60315 \cdot 10^{12}$	$-3,58392 \cdot 10^{13}$	$9,21884 \cdot 10^{12}$	-0,196973
26	$3,48861 \cdot 10^{13}$	$-2,53010 \cdot 10^{14}$	$6,47357 \cdot 10^{13}$	-0,205458
27	$2,64255 \cdot 10^{14}$	$-1,80322 \cdot 10^{15}$	$4,59130 \cdot 10^{14}$	-0,213938
28	$2,00337 \cdot 10^{15}$	$-1,29651 \cdot 10^{16}$	$3,28636 \cdot 10^{15}$	-0,222416
29	$1,52141 \cdot 10^{16}$	$-9,39808 \cdot 10^{16}$	$2,37238 \cdot 10^{16}$	-0,230892
30	$1,15807 \cdot 10^{17}$	$-6,86422 \cdot 10^{17}$	$1,72613 \cdot 10^{17}$	-0,239365

Tabelle B.7: Zu n_h proportionale Beiträge zu den Koeffizienten in der Hochenergieentwicklung der Vektorpolarisationsfunktion auf Dreischleifenniveau im On-shell-Schema.

n	$D_n^{(2),v}[n_l]$	$D_{n1}^{(2),v}[n_l]$	$D_{n2}^{(2),v}[n_l]$	$D_{n3}^{(2),v}[n_l]$
7	0,00552846	0,00223422	0,000443352	-0,0000335057
8	0,00356573	0,00137313	0,000336289	-0,0000201034
9	0,00249775	0,000903085	0,000259692	-0,0000130300
10	0,00185281	0,000625563	0,000205007	$-8,93485 \cdot 10^{-6}$
11	0,00143291	0,000451320	0,000165218	$-6,39654 \cdot 10^{-6}$
12	0,00114369	0,000336428	0,000135604	$-4,73818 \cdot 10^{-6}$
13	0,000935609	0,000257594	0,000113079	$-3,60830 \cdot 10^{-6}$
14	0,000780639	0,000201690	0,0000956020	$-2,81167 \cdot 10^{-6}$
15	0,000661943	0,000160935	0,0000818005	$-2,23371 \cdot 10^{-6}$
16	0,000568903	0,000130515	0,0000707294	$-1,80415 \cdot 10^{-6}$
17	0,000494540	0,000107343	0,0000617239	$-1,47819 \cdot 10^{-6}$
18	0,000434116	0,0000893764	0,0000543074	$-1,22635 \cdot 10^{-6}$
19	0,000384313	0,0000752286	0,0000481316	$-1,02868 \cdot 10^{-6}$
20	0,000342754	0,0000639334	0,0000429376	$-8,71355 \cdot 10^{-7}$
21	0,000307695	0,0000548044	0,0000385299	$-7,44571 \cdot 10^{-7}$
22	0,000277833	0,0000473446	0,0000347591	$-6,41257 \cdot 10^{-7}$
23	0,000252179	0,0000411880	0,0000315093	$-5,56221 \cdot 10^{-7}$
24	0,000229971	0,0000360610	0,0000286897	$-4,85590 \cdot 10^{-7}$
25	0,000210612	0,0000317564	0,0000262281	$-4,26436 \cdot 10^{-7}$
26	0,000193629	0,0000281150	0,0000240669	$-3,76519 \cdot 10^{-7}$
27	0,000178647	0,0000250135	0,0000221595	$-3,34102 \cdot 10^{-7}$
28	0,000165359	0,0000223550	0,0000204681	$-2,97828 \cdot 10^{-7}$
29	0,000153518	0,0000200628	0,0000189613	$-2,66623 \cdot 10^{-7}$
30	0,000142919	0,0000180758	0,0000176135	$-2,39632 \cdot 10^{-7}$

Tabelle B.8: Zu n_l proportionale Beiträge zu den Koeffizienten in der Hochenergieentwicklung der Vektorpolarisationsfunktion auf Dreischleifenniveau im On-shell-Schema.

n	$D_n^{(0),s}$	$D_n^{(1),s}$	$D_{n1}^{(1),s}$	$D_{n2}^{(1),s}$
7	0,000361861	0,00145583	-0,000853533	-0,000241241
8	0,000226163	0,000970772	-0,000533458	-0,000150776
9	0,000150776	0,000685646	-0,000353405	-0,000100517
10	0,000105543	0,000504448	-0,000245373	-0,0000703619
11	0,0000767585	0,000382978	-0,000176958	-0,0000511723
12	0,0000575689	0,000298191	-0,000131652	-0,0000383792
13	0,0000442837	0,000237069	-0,000100514	-0,0000295225
14	0,0000347944	0,000191818	-0,0000784331	-0,0000231962
15	0,0000278355	0,000157556	-0,0000623529	-0,0000185570
16	0,0000226163	0,000131110	-0,0000503717	-0,0000150776
17	0,0000186252	0,000110354	-0,0000412659	-0,0000124168
18	0,0000155210	0,0000938217	-0,0000342240	-0,0000103473
19	0,0000130703	0,0000804824	-0,0000286941	$-8,71355 \cdot 10^{-6}$
20	0,0000111098	0,0000695943	-0,0000242920	$-7,40652 \cdot 10^{-6}$
21	$9,52267 \cdot 10^{-6}$	0,0000606142	-0,0000207446	$-6,34845 \cdot 10^{-6}$
22	$8,22412 \cdot 10^{-6}$	0,0000531381	-0,0000178546	$-5,48275 \cdot 10^{-6}$
23	$7,15141 \cdot 10^{-6}$	0,0000468612	-0,0000154766	$-4,76761 \cdot 10^{-6}$
24	$6,25748 \cdot 10^{-6}$	0,0000415501	-0,0000135023	$-4,17166 \cdot 10^{-6}$
25	$5,50659 \cdot 10^{-6}$	0,0000370243	-0,0000118496	$-3,67106 \cdot 10^{-6}$
26	$4,87121 \cdot 10^{-6}$	0,0000331427	-0,0000104557	$-3,24747 \cdot 10^{-6}$
27	$4,32997 \cdot 10^{-6}$	0,0000297935	$-9,27188 \cdot 10^{-6}$	$-2,88664 \cdot 10^{-6}$
28	$3,86604 \cdot 10^{-6}$	0,0000268876	$-8,26006 \cdot 10^{-6}$	$-2,57736 \cdot 10^{-6}$
29	$3,46611 \cdot 10^{-6}$	0,0000243534	$-7,39012 \cdot 10^{-6}$	$-2,31074 \cdot 10^{-6}$
30	$3,11949 \cdot 10^{-6}$	0,0000221328	$-6,63807 \cdot 10^{-6}$	$-2,07966 \cdot 10^{-6}$

Tabelle B.9: Koeffizienten in der Hochenergieentwicklung der skalaren Polarisationsfunktion im On-shell-Schema bis zur Zweischleifenordnung.

n	$D_n^{(2),s}[1]$	$D_{n1}^{(2),s}[1]$	$D_{n2}^{(2),s}[1]$	$D_{n3}^{(2),s}[1]$
7	-0,0756353	0,0877214	-0,00700857	-0,00492521
8	-0,0543340	0,392566	-0,0745037	-0,00757240
9	0,145950	1,76019	-0,467913	-0,00998021
10	1,24834	8,78107	-2,55929	-0,0147756
11	6,27553	46,0162	-13,6351	-0,0214027
12	27,6236	250,751	-73,6558	-0,0326159
13	112,298	1412,52	-408,556	-0,0501066
14	408,381	8199,62	-2333,31	-0,0790922
15	1108,74	48911,1	-13707,2	-0,126489
16	-491,399	299018	-82650,3	-0,205802
17	-43563,0	$1,86902 \cdot 10^6$	-510278	-0,338920
18	-507994	$1,19183 \cdot 10^7$	$-3,21835 \cdot 10^6$	-0,565063
19	$-4,63497 \cdot 10^6$	$7,73861 \cdot 10^7$	$-2,06927 \cdot 10^7$	-0,951644
20	$-3,85109 \cdot 10^7$	$5,10762 \cdot 10^8$	$-1,35378 \cdot 10^8$	-1,61795
21	$-3,05817 \cdot 10^8$	$3,42164 \cdot 10^9$	$-8,99754 \cdot 10^8$	-2,77359
22	$-2,37073 \cdot 10^9$	$2,32349 \cdot 10^{10}$	$-6,06624 \cdot 10^9$	-4,79088
23	$-1,81376 \cdot 10^{10}$	$1,59749 \cdot 10^{11}$	$-4,14372 \cdot 10^{10}$	-8,33193
24	$-1,37796 \cdot 10^{11}$	$1,11091 \cdot 10^{12}$	$-2,86456 \cdot 10^{11}$	-14,5810
25	$-1,04344 \cdot 10^{12}$	$7,80678 \cdot 10^{12}$	$-2,00216 \cdot 10^{12}$	-25,6625
26	$-7,89383 \cdot 10^{12}$	$5,53949 \cdot 10^{13}$	$-1,41363 \cdot 10^{13}$	-45,4030
27	$-5,97510 \cdot 10^{13}$	$3,96607 \cdot 10^{14}$	$-1,00748 \cdot 10^{14}$	-80,7164
28	$-4,52965 \cdot 10^{14}$	$2,86329 \cdot 10^{15}$	$-7,24271 \cdot 10^{14}$	-144,136
29	$-3,44133 \cdot 10^{15}$	$2,08321 \cdot 10^{16}$	$-5,24887 \cdot 10^{15}$	-258,451
30	$-2,62126 \cdot 10^{16}$	$1,52665 \cdot 10^{17}$	$-3,83255 \cdot 10^{16}$	-465,213

Tabelle B.10: Koeffizienten des Dreischleifenbeitrags in der Hochenergieentwicklung der skalaren Polarisationsfunktion im On-shell-Schema für $n_h = n_l = 0$.

n	$D_n^{(2),s}[n_h]$	$D_{n1}^{(2),s}[n_h]$	$D_{n2}^{(2),s}[n_h]$	$D_{n3}^{(2),s}[n_h]$
7	-0,874624	-0,690165	0,423849	-0,0263221
8	-2,40440	-3,17167	1,45139	-0,0347454
9	-7,02036	-14,3066	5,43367	-0,0431777
10	-22,4884	-66,9131	22,7888	-0,0516144
11	-78,3922	-330,355	105,373	-0,0600536
12	-288,838	-1719,66	525,321	-0,0684941
13	-1083,24	-9375,41	2775,38	-0,0769356
14	-3925,24	-53165,1	15357,3	-0,0853776
15	-12319,1	-311774	88278,9	-0,0938200
16	-19987,5	-1,88198·10 ⁶	524056	-0,102263
17	164452	-1,16501·10 ⁷	3,19824·10 ⁶	-0,110706
18	2,62295·10 ⁶	-7,37342·10 ⁷	1,99943·10 ⁷	-0,119149
19	2,58833·10 ⁷	-4,75928·10 ⁸	1,27676·10 ⁸	-0,127592
20	2,22051·10 ⁸	-3,12633·10 ⁹	8,30773·10 ⁸	-0,136035
21	1,79132·10 ⁹	-2,08632·10 ¹⁰	5,49750·10 ⁹	-0,144478
22	1,40059·10 ¹⁰	-1,41228·10 ¹¹	3,69338·10 ¹⁰	-0,152921
23	1,07683·10 ¹¹	-9,68473·10 ¹¹	2,51556·10 ¹¹	-0,161364
24	8,20497·10 ¹¹	-6,72030·10 ¹²	1,73484·10 ¹²	-0,169808
25	6,22412·10 ¹²	-4,71405·10 ¹³	1,21012·10 ¹³	-0,178251
26	4,71371·10 ¹³	-3,33986·10 ¹⁴	8,52972·10 ¹³	-0,186694
27	3,57024·10 ¹⁴	-2,38811·10 ¹⁵	6,07040·10 ¹⁴	-0,195138
28	2,70755·10 ¹⁵	-1,72218·10 ¹⁶	4,35872·10 ¹⁵	-0,203581
29	2,05742·10 ¹⁶	-1,25180·10 ¹⁷	3,15555·10 ¹⁶	-0,212024
30	1,56726·10 ¹⁷	-9,16614·10 ¹⁷	2,30205·10 ¹⁷	-0,220468

Tabelle B.11: Zu n_h proportionale Beiträge zu den Koeffizienten in der Hochenergieentwicklung der skalaren Polarisationsfunktion auf Dreischleifenniveau im On-shell-Schema.

n	$D_n^{(2),s}[n_l]$	$D_{n1}^{(2),s}[n_l]$	$D_{n2}^{(2),s}[n_l]$	$D_{n3}^{(2),s}[n_l]$
7	0,00446591	0,00175300	0,000544994	-0,0000268045
8	0,00305487	0,00109587	0,000382713	-0,0000167528
9	0,00222355	0,000734083	0,000283622	-0,0000111686
10	0,00169271	0,000517103	0,000218471	$-7,81799 \cdot 10^{-6}$
11	0,00133305	0,000378611	0,000173315	$-5,68581 \cdot 10^{-6}$
12	0,00107798	0,000285870	0,000140736	$-4,26436 \cdot 10^{-6}$
13	0,000890443	0,000221340	0,000116472	$-3,28028 \cdot 10^{-6}$
14	0,000748436	0,000175004	0,0000979251	$-2,57736 \cdot 10^{-6}$
15	0,000638263	0,000140846	0,0000834385	$-2,06189 \cdot 10^{-6}$
16	0,000551022	0,000115095	0,0000719136	$-1,67528 \cdot 10^{-6}$
17	0,000480727	0,0000953045	0,0000625987	$-1,37965 \cdot 10^{-6}$
18	0,000423230	0,0000798366	0,0000549659	$-1,14970 \cdot 10^{-6}$
19	0,000375585	0,0000675677	0,0000486356	$-9,68172 \cdot 10^{-7}$
20	0,000335646	0,0000577080	0,0000433289	$-8,22947 \cdot 10^{-7}$
21	0,000301828	0,0000496914	0,0000388378	$-7,05383 \cdot 10^{-7}$
22	0,000272931	0,0000431048	0,0000350042	$-6,09194 \cdot 10^{-7}$
23	0,000248040	0,0000376414	0,0000317066	$-5,29734 \cdot 10^{-7}$
24	0,000226441	0,0000330707	0,0000288499	$-4,63517 \cdot 10^{-7}$
25	0,000207575	0,0000292167	0,0000263594	$-4,07895 \cdot 10^{-7}$
26	0,000190996	0,0000259437	0,0000241754	$-3,60830 \cdot 10^{-7}$
27	0,000176347	0,0000231456	0,0000222498	$-3,20738 \cdot 10^{-7}$
28	0,000163337	0,0000207389	0,0000205437	$-2,86373 \cdot 10^{-7}$
29	0,000151730	0,0000186573	0,0000190250	$-2,56749 \cdot 10^{-7}$
30	0,000141329	0,0000168474	0,0000176675	$-2,31074 \cdot 10^{-7}$

Tabelle B.12: Zu n_l proportionale Beiträge zu den Koeffizienten in der Hochenergieentwicklung der skalaren Polarisationsfunktion auf Dreischleifenniveau im On-shell-Schema.

Anhang C

Korrelatoren im Ortsraum

C.1 Herleitung der Fourier-Transformation

Die grundlegende Formel für die Fourier-Transformation der Korrelatoren ist

$$\mathcal{F}((Q^2)^{-r}) \equiv \int \frac{d^d Q}{(2\pi)^d} \frac{e^{iQX}}{(Q^2)^r} = \frac{1}{(4\pi)^{\frac{d}{2}}} \frac{\Gamma(\frac{d}{2} - r)}{\Gamma(r)} \left(\frac{X^2}{4} \right)^{\frac{d}{2} - r}. \quad (\text{C.1})$$

An dieser Stelle soll die Herleitung dieser Formel für $\text{Re}(r) > 0$ skizziert werden. Zunächst lässt sich der Nenner mit Hilfe der Schwinger-Parametrisierung umschreiben:

$$\frac{1}{(Q^2)^r} = \frac{1}{\Gamma(r)} \int_0^\infty d\alpha \alpha^{r-1} e^{-Q^2 \alpha}. \quad (\text{C.2})$$

Dies führt nach quadratischer Ergänzung und Verschiebung der Integrationsvariablen zu einem Gauß-Integral:

$$\mathcal{F}((Q^2)^r) = \frac{1}{\Gamma(r)} \int_0^\infty d\alpha \alpha^{r-1} e^{-\frac{X^2}{4\alpha}} \underbrace{\left(\int \frac{dQ}{2\pi} e^{-\alpha Q^2} \right)^d}_{\frac{1}{(4\pi\alpha)^{d/2}}}. \quad (\text{C.3})$$

Mit der Substitution $\alpha = \frac{X^2}{4\omega}$ ergibt sich

$$\mathcal{F}((Q^2)^r) = \frac{1}{(4\pi)^{\frac{d}{2}} \Gamma(r)} \left(\frac{X^2}{4} \right)^{r - \frac{d}{2}} \int_0^\infty d\omega \omega^{\frac{d}{2} - r + 1} e^{-\omega}, \quad (\text{C.4})$$

was gemäß der Definition der Gammafunktion äquivalent zu Formel (C.1) ist.

C.2 Masselose Korrelatoren

Die Ergebnisse für die Ortsraumkorrelatoren im $\widetilde{\text{MS}}$ -Schema bei der Skala $\mu^2 = 1/X^2$ sind

$$\begin{aligned}
\tilde{\Pi}^s(X) &= \frac{3}{\pi^4(X^2)^3} \left(1 + \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{D}^{(i),s} \tilde{a}_s^i \right), \\
\tilde{D}^{(1),s} &= \frac{2}{3}, \\
\tilde{D}^{(2),s} &= \frac{817}{144} - \frac{39}{2} \zeta_3 + n_l \left(-\frac{23}{72} + \frac{2}{3} \zeta_3 \right), \\
\tilde{D}^{(3),s} &= \frac{150353}{5184} - \frac{5125}{54} \zeta_3 + \frac{815}{12} \zeta_5 + n_l \left(-\frac{13361}{3888} + \frac{3}{4} \zeta_3 - \frac{5}{6} \zeta_4 - \frac{25}{9} \zeta_5 \right) \\
&\quad + n_l^2 \left(-\frac{383}{11664} + \frac{8}{27} \zeta_3 \right), \\
\tilde{D}^{(4),s} &= + \frac{22254833}{497664} - \frac{592067}{5184} \zeta_3 + \frac{458425}{432} \zeta_3^2 + \frac{265}{18} \zeta_4 - \frac{607225}{864} \zeta_5 \\
&\quad - \frac{1375}{32} \zeta_6 - \frac{178045}{768} \zeta_7 + n_l \left(-\frac{8775605}{373248} - \frac{392129}{5184} \zeta_3 \right. \\
&\quad \left. - \frac{955}{16} \zeta_3^2 - \frac{6731}{576} \zeta_4 + \frac{45695}{216} \zeta_5 + \frac{2875}{288} \zeta_6 + \frac{665}{72} \zeta_7 \right) \\
&\quad + n_l^2 \left(-\frac{224695}{2239488} + \frac{11263}{1296} \zeta_3 + \frac{5}{6} \zeta_3^2 + \frac{25}{96} \zeta_4 - \frac{6515}{432} \zeta_5 \right) \\
&\quad + n_l^3 \left(\frac{6653}{559872} - \frac{173}{1296} \zeta_3 + \frac{1}{144} \zeta_4 + \frac{5}{18} \zeta_5 \right), \tag{C.5}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{\Pi}_{\mu\nu}^v(X) &= \frac{6}{\pi^4(X^2)^3} \left[\left(\frac{\delta_{\mu\nu}}{2} - \frac{X_\mu X_\nu}{X^2} \right) \tilde{D}^v + \delta_{\mu\nu} \tilde{D}'^v \right], \\
\tilde{D}^v &= 1 + \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{D}^{(i),v} \tilde{a}_s^i, \quad \tilde{D}'^v = \sum_{i=0}^{\infty} \tilde{D}'^{(i),v} \tilde{a}_s^i, \\
\tilde{D}^{(1),v} &= 1, \\
\tilde{D}^{(2),v} &= \frac{61}{6} - 11 \zeta_3 + n_l \left(-\frac{11}{18} + \frac{2}{3} \zeta_3 \right), \\
\tilde{D}^{(3),v} &= \frac{7309}{48} - \frac{989}{6} \zeta_3 + \frac{275}{6} \zeta_5 + n_l \left(-\frac{2617}{144} + \frac{47}{3} \zeta_3 - \frac{25}{9} \zeta_5 \right) \\
&\quad + n_l^2 \left(\frac{277}{648} - \frac{8}{27} \zeta_3 \right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \tilde{D}^{(4),v} &= \frac{57640705}{20736} - \frac{278401}{108}\zeta_3 + \frac{5445}{8}\zeta_3^2 - \frac{133705}{288}\zeta_5 - \frac{7315}{48}\zeta_7 \\
 &\quad + n_l \left(-\frac{10278875}{20736} + \frac{50705}{144}\zeta_3 - 55\zeta_3^2 + \frac{65975}{432}\zeta_5 + \frac{665}{72}\zeta_7 \right) \\
 &\quad + n_l^2 \left(\frac{1554751}{62208} - \frac{10691}{864}\zeta_3 + \frac{5}{6}\zeta_3^2 - \frac{1315}{108}\zeta_5 \right) \\
 &\quad + n_l^3 \left(-\frac{503}{1458} + \frac{2}{27}\zeta_3 + \frac{5}{18}\zeta_5 \right), \\
 \tilde{D}'^{(0),v} &= \tilde{D}'^{(1),v} = 0, \\
 \tilde{D}'^{(2),v} &= -\frac{11}{24} + \frac{n_l}{36}, \\
 \tilde{D}'^{(3),v} &= -\frac{101}{9} + \frac{121}{12}\zeta_3 + n_l \left(\frac{587}{432} - \frac{11}{9}\zeta_3 \right) + n_l^2 \left(-\frac{1}{27} + \frac{1}{27}\zeta_3 \right), \\
 \tilde{D}'^{(4),v} &= -\frac{616333}{2304} + \frac{1111}{4}\zeta_3 - \frac{3025}{48}\zeta_5 + n_l \left(\frac{111409}{2304} - \frac{1607}{36}\zeta_3 + \frac{275}{36}\zeta_5 \right) \\
 &\quad + n_l^2 \left(-\frac{54373}{20736} + \frac{79}{36}\zeta_3 - \frac{25}{108}\zeta_5 \right) + n_l^3 \left(\frac{325}{7776} - \frac{5}{162}\zeta_3 \right), \quad (C.6)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \tilde{\Pi}_{\mu\nu\rho\sigma}^t(X) &= -\frac{6}{\pi^4(X^2)^3} \left(\frac{1}{2}T_{\mu\nu\rho\sigma} - T'_{\mu\nu\rho\sigma}(X) \right) \left(1 + \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{D}^{(i),t} \tilde{a}_s^i \right), \\
 \tilde{D}^{(1),t} &= 2, \\
 \tilde{D}^{(2),t} &= \frac{5303}{432} - \frac{143}{18}\zeta_3 + n_l \left(-\frac{443}{648} + \frac{2}{3}\zeta_3 \right), \\
 \tilde{D}^{(3),t} &= +\frac{8439437}{46656} - \frac{77977}{486}\zeta_3 + \frac{29}{54}\zeta_4 + \frac{2395}{108}\zeta_5 \\
 &\quad + n_l \left(-\frac{246515}{11664} + \frac{1985}{108}\zeta_3 + \frac{5}{18}\zeta_4 - \frac{25}{9}\zeta_5 \right) \\
 &\quad + n_l^2 \left(\frac{18287}{34992} - \frac{4}{9}\zeta_3 \right). \quad (C.7)
 \end{aligned}$$

Anhang D

Renormierungsgruppen-entwicklung

D.1 Renormierungsgruppengleichungen

Für die Polarisationsfunktionen im Impulsraum ergibt sich nach Renormierung

$$\Pi^\delta(q^2, \mu^2) = (Z^\delta)^2 \Pi_0^\delta(q^2) + (\mu^2)^{-\epsilon} Z^{\delta\delta}, \quad (\text{D.1})$$

wobei $\Pi_0^\delta(q^2)$ für die entsprechende nackte Polarisationsfunktion steht. Die multiplikative Renormierungskonstante Z^δ stammt aus der Definition des renormierten Stroms $j^\delta = Z^\delta j_0^\delta$; zusätzlich wird eine subtraktive Renormierung benötigt.

Durch Ableiten erhält man aus Gl. (D.1) die Renormierungsgruppengleichung für die Polarisationsfunktion:

$$\mu^2 \frac{d}{d\mu^2} \Pi^\delta(q^2, \mu^2) = 2\gamma^\delta \Pi^\delta(q^2, \mu^2) + \gamma^{\delta\delta}. \quad (\text{D.2})$$

Die anomalen Dimensionen γ^δ und $\gamma^{\delta\delta}$ sind dabei über

$$\gamma^\delta = \mu^2 \frac{d}{d\mu^2} \log Z^\delta, \quad \gamma^{\delta\delta} = \mu^2 \frac{d}{d\mu^2} Z^{\delta\delta} - (2\gamma^\delta + \epsilon) Z^{\delta\delta} \quad (\text{D.3})$$

definiert. Die Renormierungsgruppengleichung Gl. (D.2) lässt sich mit Standardmethoden einfach lösen. Dies ermöglicht die Evolution der Polarisationsfunktionen von einer Skala μ_0 zu einer anderen Skala μ_1 :

$$\begin{aligned} \Pi^\delta(q^2, \mu_1^2) &= U(a_s(\mu_1), a_s(\mu_0)) (\Pi^\delta(q^2, \mu_0^2) + \Delta(\mu_1, \mu_0)), \\ \Delta(\mu_1, \mu_0) &= \int_{a_s(\mu_0)}^{a_s(\mu_1)} \frac{dz}{z} \frac{\gamma^{\delta\delta}(z)}{\beta(z)} U(a_s(\mu_0), z), \\ U(x, y) &= \exp \left(\int_y^x \frac{dz}{z} \frac{2\gamma^\delta(z)}{\beta(z)} \right). \end{aligned} \quad (\text{D.4})$$

Hierzu wurde die Definition der β -Funktion, d.h. die Relation

$$\int \frac{d\mu^2}{\mu^2} = \int \frac{dz}{z} \frac{1}{\beta(z)} \quad (\text{D.5})$$

ausgenutzt.

Im Ortsraum ist keine subtraktive Renormierung nötig; die Lösung der Renormierungsgruppengleichung vereinfacht sich damit zu

$$\Pi^\delta(X^2, \mu_1^2) = \exp \left(\int_{a_s(\mu_0)}^{a_s(\mu_1)} \frac{dz}{z} \frac{2\gamma^\delta(z)}{\beta(z)} \right) \Pi^\delta(X^2, \mu_0^2). \quad (\text{D.6})$$

Analog gilt im in Abschnitt 3.3.1 eingeführten $\widetilde{\text{MS}}$ -Schema

$$\widetilde{\Pi}^\delta(X^2, \mu_1^2) = \exp \left(\int_{\widetilde{a}_s(\mu_0)}^{\widetilde{a}_s(\mu_1)} \frac{dz}{z} \frac{2\gamma^\delta(z)}{\beta(z)} \right) \widetilde{\Pi}^\delta(X^2, \mu_0^2). \quad (\text{D.7})$$

D.2 Anomale Dimensionen

Die multiplikativen anomalen Dimensionen im $\overline{\text{MS}}$ -Schema mit n_f aktiven Quarks sind

$$\gamma^v(a_s) = \gamma^a(a_s) = 0, \quad (\text{D.8})$$

$$\gamma^s(a_s) = \gamma^p(a_s) = -\gamma_m = \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n^s a_s^{n+1},$$

$$\gamma_0^s = 1,$$

$$\gamma_1^s = \frac{101}{24} - \frac{5}{36}n_f,$$

$$\gamma_2^s = \frac{1249}{64} + n_f \left(-\frac{277}{216} - \frac{5}{6}\zeta_3 \right) - \frac{35}{1296}n_f^2,$$

$$\begin{aligned} \gamma_3^s = & \frac{4603055}{41472} + \frac{530}{27}\zeta_3 - \frac{275}{8}\zeta_5 + n_f \left(-\frac{91723}{6912} - \frac{2137}{144}\zeta_3 + \frac{55}{16}\zeta_4 + \frac{575}{72}\zeta_5 \right) \\ & + n_f^2 \left(\frac{2621}{31104} + \frac{25}{72}\zeta_3 - \frac{5}{24}\zeta_4 \right) + n_f^3 \left(-\frac{83}{15552} + \frac{1}{108}\zeta_3 \right), \end{aligned} \quad (\text{D.9})$$

$$\begin{aligned}
\gamma^t(a_s) &= \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n^T a_s^{n+1}, \\
\gamma_0^t &= -\frac{1}{3}, \\
\gamma_1^t &= -\frac{181}{72} + \frac{13}{108} n_f, \\
\gamma_2^t &= -\frac{52555}{5184} + \frac{29}{54} \zeta_3 + n_f \left(\frac{655}{648} + \frac{5}{18} \zeta_3 \right) + \frac{n_f^2}{144}, \\
\gamma_3^t &= -\frac{2208517}{41472} + \frac{7733}{3888} \zeta_3 - \frac{319}{144} \zeta_4 + \frac{10465}{972} \zeta_5 \\
&\quad + n_f \left(\frac{1537379}{186624} + \frac{18979}{3888} \zeta_3 - \frac{437}{432} \zeta_4 - \frac{575}{216} \zeta_5 \right) \\
&\quad + n_f^2 \left(-\frac{9961}{93312} - \frac{115}{648} \zeta_3 + \frac{5}{72} \zeta_4 \right) + n_f^3 \left(-\frac{7}{15552} - \frac{1}{324} \zeta_3 \right). \quad (D.10)
\end{aligned}$$

Die anomale Massendimension wurde in [113, 114] berechnet, die anomale Dimension des Tensorkorrelators findet sich in [96]. Zusätzlich wird für die Renormierungsgruppenentwicklung die β -Funktion benötigt. Das Vierschleifenergebnis lautet [114, 115]

$$\begin{aligned}
\beta(a_s) &= -\sum_{n=0}^{\infty} \beta_n a_s^{n+1}, \\
\beta_0 &= \frac{11}{4} - \frac{n_f}{6}, \\
\beta_1 &= \frac{51}{8} - \frac{19}{24} n_f, \\
\beta_2 &= \frac{2857}{128} - \frac{5033}{1152} n_f + \frac{325}{3456} n_f^2, \\
\beta_3 &= \frac{149753}{1536} + \frac{891}{64} \zeta_3 + n_f \left(-\frac{1078361}{41472} - \frac{1627}{1728} \zeta_3 \right) \\
&\quad + n_f^2 \left(\frac{50065}{41472} + \frac{809}{2592} \zeta_3 \right) + \frac{1093}{186624} n_f^3. \quad (D.11)
\end{aligned}$$

D.3 Renormierungsschemata

In dieser Arbeit werden die Quarkmassen je nach Zusammenhang entweder im $\overline{\text{MS}}$ -Schema oder im On-shell-Schema renormiert. Im Folgenden werden die Umrechnungsfaktoren zwischen den beiden Schemata angegeben; die Quarkmasse im On-shell-Schema wird dabei mit M_q bezeichnet, die im $\overline{\text{MS}}$ -Schema mit $m_q(\mu)$. Die in der Konversion auftretenden Logarithmen werden durch $L_M = \log(\mu^2/M_q^2)$ und $L_m = \log(\mu^2/m_q(\mu^2)^2)$ ausgedrückt. Die Masse im $\overline{\text{MS}}$ -Schema

lässt sich mit folgender Formel in das On-shell-Schema umrechnen [116–118]:

$$\begin{aligned}
m_q(\mu) &= M_q \left(1 + \sum_{i=1}^{\infty} \delta_m^{(i)} a_s^i \right), \\
\delta_m^{(1)} &= -\frac{4}{3} - L_M, \\
\delta_m^{(2)} &= -\frac{3305}{288} - \frac{2}{9}\pi^2 + \frac{1}{6}\zeta_3 - \frac{157}{24}L_M - \frac{7}{8}L_M^2 - \frac{1}{9}\pi^2 \log 2 \\
&\quad + n_l \left(\frac{71}{144} + \frac{1}{18}\pi^2 + \frac{13}{36}L_M + \frac{1}{12}L_M^2 \right) \\
&\quad + n_h \left(\frac{143}{144} - \frac{1}{9}\pi^2 + \frac{13}{36}L_M + \frac{1}{12}L_M^2 \right), \\
\delta_m^{(3)} &= -\frac{1259285}{10368} + \frac{76}{9}\text{Li}_4 - \frac{24995}{2592}\pi^2 + \frac{341}{2592}\pi^4 - \frac{1705}{216}\zeta_5 + \frac{73}{72}\zeta_3 \\
&\quad + \frac{1331}{432}\zeta_3\pi^2 - \frac{21325}{288}L_M - L_M\pi^2 + \frac{3}{4}L_M\zeta_3 - \frac{1517}{96}L_M^2 \\
&\quad - \frac{21}{16}L_M^3 - \frac{77}{18}\pi^2 \log 2 - \frac{1}{2}L_M\pi^2 \log 2 + \frac{7}{27}\pi^2 \log^2 2 + \frac{19}{54}\log^4 2 \\
&\quad + n_l \left(\frac{86159}{7776} - \frac{8}{27}\text{Li}_4 + \frac{941}{648}\pi^2 - \frac{61}{1944}\pi^4 + \frac{707}{216}\zeta_3 \right. \\
&\quad + \frac{3541}{432}L_M + \frac{35}{108}L_M\pi^2 + \frac{7}{9}L_M\zeta_3 + \frac{107}{48}L_M^2 + \frac{2}{9}L_M^3 \\
&\quad + \frac{11}{81}\pi^2 \log 2 + \frac{1}{27}L_M\pi^2 \log 2 - \frac{2}{81}\pi^2 \log^2 2 - \frac{1}{81}\log^4 2 \Big) \\
&\quad + n_h \left(\frac{157763}{7776} - \frac{8}{27}\text{Li}_4 - \frac{13483}{1944}\pi^2 - \frac{41}{972}\pi^4 - \frac{5}{4}\zeta_5 - \frac{751}{216}\zeta_3 \right. \\
&\quad + \frac{1}{4}\zeta_3\pi^2 + \frac{4513}{432}L_M - \frac{23}{54}L_M\pi^2 + \frac{7}{9}L_M\zeta_3 + \frac{107}{48}L_M^2 \\
&\quad + \frac{2}{9}L_M^3 + \frac{640}{81}\pi^2 \log 2 + \frac{1}{27}L_M\pi^2 \log 2 + \frac{1}{81}\pi^2 \log^2 2 - \frac{1}{81}\log^4 2 \Big) \\
&\quad + n_l^2 \left(-\frac{2353}{23328} - \frac{13}{324}\pi^2 - \frac{7}{54}\zeta_3 - \frac{89}{648}L_M - \frac{1}{54}L_M\pi^2 \right. \\
&\quad - \frac{13}{216}L_M^2 - \frac{1}{108}L_M^3 \Big) + n_h n_l \left(-\frac{5917}{11664} + \frac{13}{324}\pi^2 + \frac{2}{27}\zeta_3 - \frac{143}{324}L_M \right. \\
&\quad + \frac{1}{54}L_M\pi^2 - \frac{13}{108}L_M^2 - \frac{1}{54}L_M^3 \Big) + n_h^2 \left(-\frac{9481}{23328} + \frac{4}{405}\pi^2 + \frac{11}{54}\zeta_3 \right. \\
&\quad - \frac{197}{648}L_M + \frac{1}{27}L_M\pi^2 - \frac{13}{216}L_M^2 - \frac{1}{108}L_M^3 \Big). \tag{D.12}
\end{aligned}$$

Entsprechend ergibt sich für die Umrechnung von Logarithmen L_m

$$\begin{aligned}
L_m &= L_M + \sum_{i=1}^{\infty} \delta_{L_m}^{(i)} a_s^i, \\
\delta_{L_m}^{(1)} &= \frac{8}{3} + 2L_M,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \delta_{L_m}^{(2)} = & \frac{1187}{48} + \frac{4}{9}\pi^2 - \frac{1}{3}\zeta_3 + \frac{63}{4}L_M + \frac{11}{4}L_M^2 + \frac{2}{9}\pi^2 \log 2 \\
 & + n_l \left(-\frac{71}{72} - \frac{1}{9}\pi^2 - \frac{13}{18}L_M - \frac{1}{6}L_M^2 \right) \\
 & + n_h \left(-\frac{143}{72} + \frac{2}{9}\pi^2 - \frac{13}{18}L_M - \frac{1}{6}L_M^2 \right), \\
 \delta_{L_m}^{(3)} = & \frac{1426117}{5184} - \frac{152}{9}\text{Li}_4 + \frac{25763}{1296}\pi^2 - \frac{341}{1296}\pi^4 + \frac{1705}{108}\zeta_5 \\
 & - \frac{89}{36}\zeta_3 - \frac{1331}{216}\zeta_3\pi^2 + \frac{4609}{24}L_M + \frac{22}{9}L_M\pi^2 - \frac{11}{6}L_M\zeta_3 \\
 & + \frac{795}{16}L_M^2 + \frac{121}{24}L_M^3 + \frac{239}{27}\pi^2 \log 2 + \frac{11}{9}L_M\pi^2 \log 2 \\
 & - \frac{14}{27}\pi^2 \log^2 2 - \frac{19}{27}\log^4 2 + n_l \left(-\frac{91271}{3888} + \frac{16}{27}\text{Li}_4 - \frac{989}{324}\pi^2 \right. \\
 & + \frac{61}{972}\pi^4 - \frac{707}{108}\zeta_3 - \frac{1981}{108}L_M - \frac{41}{54}L_M\pi^2 - \frac{14}{9}L_M\zeta_3 \\
 & - \frac{389}{72}L_M^2 - \frac{11}{18}L_M^3 - \frac{22}{81}\pi^2 \log 2 - \frac{2}{27}L_M\pi^2 \log 2 \\
 & + \frac{4}{81}\pi^2 \log^2 2 + \frac{2}{81}\log^4 2 \Big) + n_l^2 \left(\frac{2353}{11664} + \frac{13}{162}\pi^2 + \frac{7}{27}\zeta_3 \right. \\
 & + \frac{89}{324}L_M + \frac{1}{27}L_M\pi^2 + \frac{13}{108}L_M^2 + \frac{1}{54}L_M^3 \Big) \\
 & + n_h \left(-\frac{168059}{3888} + \frac{16}{27}\text{Li}_4 + \frac{13771}{972}\pi^2 + \frac{41}{486}\pi^4 + \frac{5}{2}\zeta_5 + \frac{751}{108}\zeta_3 \right. \\
 & - \frac{1}{2}\zeta_3\pi^2 - \frac{2575}{108}L_M + \frac{29}{27}L_M\pi^2 - \frac{14}{9}L_M\zeta_3 - \frac{389}{72}L_M^2 - \frac{11}{18}L_M^3 \\
 & - \frac{1280}{81}\pi^2 \log 2 - \frac{2}{27}L_M\pi^2 \log 2 - \frac{2}{81}\pi^2 \log^2 2 + \frac{2}{81}\log^4 2 \Big) \\
 & + n_h n_l \left(\frac{5917}{5832} - \frac{13}{162}\pi^2 - \frac{4}{27}\zeta_3 + \frac{143}{162}L_M - \frac{1}{27}L_M\pi^2 + \frac{13}{54}L_M^2 + \frac{1}{27}L_M^3 \right) \\
 & + n_h^2 \left(\frac{9481}{11664} - \frac{8}{405}\pi^2 - \frac{11}{27}\zeta_3 + \frac{197}{324}L_M - \frac{2}{27}L_M\pi^2 + \frac{13}{108}L_M^2 + \frac{1}{54}L_M^3 \right).
 \end{aligned}
 \tag{D.13}$$

Durch Invertieren der Beziehungen (D.12) und (D.13) können umgekehrt M_q und L_M durch die entsprechenden $\overline{\text{MS}}$ -Größen ausgedrückt werden:

$$\begin{aligned}
 m_q(\mu) = & M_q \left(1 + \sum_{i=1}^{\infty} \delta_M^{(i)} a_s^i \right), \\
 \delta_M^{(1)} = & \frac{4}{3} + L_m,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \delta_M^{(2)} &= \frac{3049}{288} - \frac{1}{6}\zeta_3 + \frac{4}{3}\zeta_2 + \frac{2}{3}\zeta_2 \log 2 + \frac{173}{24}L_m + \frac{15}{8}L_m^2 \\
 &\quad + n_l \left(-\frac{71}{144} - \frac{1}{3}\zeta_2 - \frac{13}{36}L_m - \frac{1}{12}L_m^2 \right) \\
 &\quad + n_h \left(-\frac{143}{144} + \frac{2}{3}\zeta_2 - \frac{13}{36}L_m - \frac{1}{12}L_m^2 \right), \\
 \delta_M^{(3)} &= \frac{1145453}{10368} - \frac{76}{9}\text{Li}_4 - \frac{19}{54}\log^4 2 + \frac{1705}{216}\zeta_5 - \frac{9}{8}\zeta_3 + \frac{25379}{432}\zeta_2 \\
 &\quad + \frac{235}{9}\zeta_2 \log 2 - \frac{14}{9}\zeta_2 \log^2 2 - \frac{1331}{72}\zeta_2 \zeta_3 - \frac{341}{72}\zeta_2^2 + \frac{22927}{288}L_m \\
 &\quad - \frac{13}{12}L_m \zeta_3 + \frac{26}{3}L_m \zeta_2 + \frac{13}{3}L_m \zeta_2 \log 2 + \frac{799}{32}L_m^2 + \frac{65}{16}L_m^3 \\
 &\quad + n_l \left(-\frac{81227}{7776} + \frac{8}{27}\text{Li}_4 + \frac{1}{81}\log^4 2 - \frac{707}{216}\zeta_3 - \frac{965}{108}\zeta_2 - \frac{22}{27}\zeta_2 \log 2 \right. \\
 &\quad + \frac{4}{27}\zeta_2 \log^2 2 + \frac{61}{54}\zeta_2^2 - \frac{1189}{144}L_m - \frac{7}{9}L_m \zeta_3 - \frac{47}{18}L_m \zeta_2 - \frac{2}{9}L_m \zeta_2 \log 2 \\
 &\quad \left. - \frac{385}{144}L_m^2 - \frac{7}{18}L_m^3 \right) + n_h \left(-\frac{155423}{7776} + \frac{8}{27}\text{Li}_4 + \frac{1}{81}\log^4 2 + \frac{5}{4}\zeta_5 \right. \\
 &\quad + \frac{751}{216}\zeta_3 + \frac{13627}{324}\zeta_2 - \frac{1280}{27}\zeta_2 \log 2 - \frac{2}{27}\zeta_2 \log^2 2 - \frac{3}{2}\zeta_2 \zeta_3 + \frac{41}{27}\zeta_2^2 \\
 &\quad \left. - \frac{1657}{144}L_m - \frac{7}{9}L_m \zeta_3 + \frac{35}{9}L_m \zeta_2 - \frac{2}{9}L_m \zeta_2 \log 2 - \frac{385}{144}L_m^2 - \frac{7}{18}L_m^3 \right) \\
 &\quad + n_h n_l \left(\frac{5917}{11664} - \frac{2}{27}\zeta_3 - \frac{13}{54}\zeta_2 + \frac{143}{324}L_m - \frac{1}{9}L_m \zeta_2 + \frac{13}{108}L_m^2 + \frac{1}{54}L_m^3 \right) \\
 &\quad + n_l^2 \left(\frac{2353}{23328} + \frac{7}{54}\zeta_3 + \frac{13}{54}\zeta_2 + \frac{89}{648}L_m + \frac{1}{9}L_m \zeta_2 + \frac{13}{216}L_m^2 + \frac{1}{108}L_m^3 \right) \\
 &\quad + n_h^2 \left(\frac{9481}{23328} - \frac{11}{54}\zeta_3 - \frac{8}{135}\zeta_2 + \frac{197}{648}L_m - \frac{2}{9}L_m \zeta_2 + \frac{13}{216}L_m^2 + \frac{1}{108}L_m^3 \right), \tag{D.14}
 \end{aligned}$$

$$L_M = L_m + \sum_{i=1}^{\infty} \delta_{L_M}^{(i)} a_s^i,$$

$$\delta_{L_M}^{(1)} = -\frac{8}{3} - 2L_m,$$

$$\begin{aligned}
 \delta_{L_M}^{(2)} &= -\frac{931}{48} + \frac{1}{3}\zeta_3 - \frac{8}{3}\zeta_2 - \frac{4}{3}\zeta_2 \log 2 - \frac{47}{4}L_m - \frac{11}{4}L_m^2 \\
 &\quad + n_l \left(\frac{71}{72} + \frac{2}{3}\zeta_2 + \frac{13}{18}L_m + \frac{1}{6}L_m^2 \right) \\
 &\quad + n_h \left(\frac{143}{72} - \frac{4}{3}\zeta_2 + \frac{13}{18}L_m + \frac{1}{6}L_m^2 \right),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\delta_{LM}^{(3)} = & -\frac{1007293}{5184} + \frac{152}{9} \text{Li}_4 + \frac{19}{27} \log^4 2 - \frac{1705}{108} \zeta_5 + \frac{65}{36} \zeta_3 - \frac{24611}{216} \zeta_2 \\
& - \frac{454}{9} \zeta_2 \log 2 + \frac{28}{9} \zeta_2 \log^2 2 + \frac{1331}{36} \zeta_2 \zeta_3 + \frac{341}{36} \zeta_2^2 - \frac{979}{8} L_m \\
& + \frac{11}{6} L_m \zeta_3 - \frac{44}{3} L_m \zeta_2 - \frac{22}{3} L_m \zeta_2 \log 2 - \frac{531}{16} L_m^2 - \frac{121}{24} L_m^3 \\
& + n_l \left(\frac{76115}{3888} - \frac{16}{27} \text{Li}_4 - \frac{2}{81} \log^4 2 + \frac{707}{108} \zeta_3 + \frac{917}{54} \zeta_2 + \frac{44}{27} \zeta_2 \log 2 \right. \\
& - \frac{8}{27} \zeta_2 \log^2 2 - \frac{61}{27} \zeta_2^2 + \frac{1573}{108} L_m + \frac{14}{9} L_m \zeta_3 + \frac{41}{9} L_m \zeta_2 + \frac{4}{9} L_m \zeta_2 \log 2 \\
& + \frac{317}{72} L_m^2 + \frac{11}{18} L_m^3 \Big) + n_h \left(\frac{145127}{3888} - \frac{16}{27} \text{Li}_4 - \frac{2}{81} \log^4 2 - \frac{5}{2} \zeta_5 \right. \\
& - \frac{751}{108} \zeta_3 - \frac{13339}{162} \zeta_2 + \frac{2560}{27} \zeta_2 \log 2 + \frac{4}{27} \zeta_2 \log^2 2 + 3 \zeta_2 \zeta_3 - \frac{82}{27} \zeta_2^2 \\
& + \frac{2167}{108} L_m + \frac{14}{9} L_m \zeta_3 - \frac{58}{9} L_m \zeta_2 + \frac{4}{9} L_m \zeta_2 \log 2 + \frac{317}{72} L_m^2 + \frac{11}{18} L_m^3 \Big) \\
& + n_h n_l \left(-\frac{5917}{5832} + \frac{4}{27} \zeta_3 + \frac{13}{27} \zeta_2 - \frac{143}{162} L_m + \frac{2}{9} L_m \zeta_2 - \frac{13}{54} L_m^2 - \frac{1}{27} L_m^3 \right) \\
& + n_l^2 \left(-\frac{2353}{11664} - \frac{7}{27} \zeta_3 - \frac{13}{27} \zeta_2 - \frac{89}{324} L_m - \frac{2}{9} L_m \zeta_2 - \frac{13}{108} L_m^2 - \frac{1}{54} L_m^3 \right) \\
& + n_h^2 \left(-\frac{9481}{11664} + \frac{11}{27} \zeta_3 + \frac{16}{135} \zeta_2 - \frac{197}{324} L_m + \frac{4}{9} L_m \zeta_2 - \frac{13}{108} L_m^2 - \frac{1}{54} L_m^3 \right).
\end{aligned}
\tag{D.15}$$

Literaturverzeichnis

- [1] J. H. Kühn, M. Steinhauser, C. Sturm. Heavy quark masses from sum rules in four-loop approximation. *Nucl. Phys.*, B778:192–215, 2007. [arXiv:hep-ph/0702103](#).
- [2] G. Corcella, A. H. Hoang. Uncertainties in the $\overline{\text{MS}}$ bottom quark mass from relativistic sum rules. *Phys. Lett.*, B554:133–140, 2003. [arXiv:hep-ph/0212297](#).
- [3] A. H. Hoang, et al. Top-antitop pair production close to threshold: Synopsis of recent NNLO results. *Eur. Phys. J. direct*, C2:1, 2000. [arXiv:hep-ph/0001286](#).
- [4] K. G. Chetyrkin, M. Steinhauser. Three-loop non-diagonal current correlators in QCD and NLO corrections to single top quark production. *Phys. Lett.*, B502:104–114, 2001. [arXiv:hep-ph/0012002](#).
- [5] K. G. Chetyrkin, M. Steinhauser. Heavy-light current correlators at order α_s^2 in QCD and HQET. *Eur. Phys. J.*, C21:319–338, 2001. [arXiv:hep-ph/0108017](#).
- [6] M. A. Shifman, A. I. Vainshtein, V. I. Zakharov. QCD and resonance physics. Sum rules. *Nucl. Phys.*, B147:385–447, 1979.
- [7] P. Colangelo, A. Khodjamirian. QCD sum rules, a modern perspective. 2000. [arXiv:hep-ph/0010175](#).
- [8] K. G. Chetyrkin, A. Khodjamirian. Strange quark mass from pseudoscalar sum rule with $\mathcal{O}(\alpha_s^4)$ accuracy. *Eur. Phys. J.*, C46:721–728, 2006. [arXiv:hep-ph/0512295](#).
- [9] J. H. Kühn, M. Steinhauser. Determination of α_s and heavy quark masses from recent measurements of $R(s)$. *Nucl. Phys.*, B619:588–602, 2001. [arXiv:hep-ph/0109084](#).
- [10] K. G. Chetyrkin, J. H. Kühn, A. Maier, P. Maierhöfer, P. Marquard, M. Steinhauser, C. Sturm. Charm and bottom quark masses: an update. *Phys. Rev.*, D80:074010, 2009. [arXiv:0907.2110](#).

- [11] I. Allison, et al. High-precision charm-quark mass from current-current correlators in lattice and continuum QCD. *Phys. Rev.*, D78:054513, 2008. [arXiv:0805.2999](#).
- [12] C. McNeile, C. T. H. Davies, E. Follana, K. Hornbostel, G. P. Lepage. High-precision c and b masses, and QCD coupling from current-current correlators in lattice and continuum QCD. 2010. [arXiv:1004.4285](#).
- [13] V. A. Novikov, et al. Charmonium and gluons: Basic experimental facts and theoretical introduction. *Phys. Rept.*, 41:1–133, 1978.
- [14] B. Aubert, et al. Measurement of the $e^+e^- \rightarrow b\bar{b}$ cross section between $\sqrt{s} = 10.54$ GeV and 11.20 GeV. *Phys. Rev. Lett.*, 102:012001, 2009. [arXiv:0809.4120](#).
- [15] S. Jadach, B. F. L. Ward. Yfs2: The second order monte carlo for fermion pair production at LEP / SLC with the initial state radiation of two hard and multiple soft photons. *Comput. Phys. Commun.*, 56:351–384, 1990.
- [16] K. G. Chetyrkin, J. H. Kühn, T. Teubner. Extracting $\alpha(s)$ from electron positron annihilation around 10 GeV. *Phys. Rev.*, D56:3011–3018, 1997. [arXiv:hep-ph/9609411](#).
- [17] C. Amsler et al. (Particle Data Group). *Phys. Lett.*, B667:1, 2008.
- [18] D. J. Broadhurst, J. Fleischer, O. V. Tarasov. Two loop two point functions with masses: Asymptotic expansions and Taylor series, in any dimension. *Z. Phys.*, C60:287–302, 1993. [arXiv:hep-ph/9304303](#).
- [19] J. Fleischer, O. V. Tarasov. Calculation of Feynman diagrams from their small momentum expansion. *Z. Phys.*, C64:413–426, 1994. [arXiv:hep-ph/9403230](#).
- [20] D. J. Broadhurst, et al. Two loop gluon condensate contributions to heavy quark current correlators: Exact results and approximations. *Phys. Lett.*, B329:103–110, 1994. [arXiv:hep-ph/9403274](#).
- [21] P. A. Baikov, D. J. Broadhurst. Three-loop QED vacuum polarization and the four-loop muon anomalous magnetic moment. 1995. [arXiv:hep-ph/9504398](#).
- [22] K. G. Chetyrkin, J. H. Kühn, M. Steinhauser. Heavy quark vacuum polarisation to three loops. *Phys. Lett.*, B371:93–98, 1996. [arXiv:hep-ph/9511430](#).
- [23] A. O. G. Källén, A. Sabry. Fourth order vacuum polarization. *Kong. Dan. Vid. Sel. Mat. Fys. Med.*, 29N17:1–20, 1955.

- [24] K. G. Chetyrkin, J. H. Kühn, M. Steinhauser. Three-loop polarization function and $\mathcal{O}(\alpha_s^2)$ corrections to the production of heavy quarks. *Nucl. Phys.*, B482:213–240, 1996. [arXiv:hep-ph/9606230](#).
- [25] K. G. Chetyrkin, J. H. Kühn, M. Steinhauser. Heavy quark current correlators to $\mathcal{O}(\alpha_s^2)$. *Nucl. Phys.*, B505:40–64, 1997. [arXiv:hep-ph/9705254](#).
- [26] K. G. Chetyrkin, R. Harlander, M. Steinhauser. Singlet polarization functions at $\mathcal{O}(\alpha_s^2)$. *Phys. Rev.*, D58:014012, 1998. [arXiv:hep-ph/9801432](#).
- [27] R. Boughezal, M. Czakon, T. Schutzmeier. Four-loop tadpoles: Applications in QCD. *Nucl. Phys. Proc. Suppl.*, 160:160–164, 2006. [arXiv:hep-ph/0607141](#).
- [28] A. Maier, P. Maierhöfer, P. Marquard. Higher moments of heavy quark correlators in the low energy limit at $\mathcal{O}(\alpha_s^2)$. *Nucl. Phys.*, B797:218–242, 2008. [arXiv:0711.2636](#).
- [29] K. G. Chetyrkin, J. H. Kühn, C. Sturm. Four-loop moments of the heavy quark vacuum polarization function in perturbative QCD. *Eur. Phys. J.*, C48:107–110, 2006. [arXiv:hep-ph/0604234](#).
- [30] R. Boughezal, M. Czakon, T. Schutzmeier. Charm and bottom quark masses from perturbative QCD. *Phys. Rev.*, D74:074006, 2006. [arXiv:hep-ph/0605023](#).
- [31] C. Sturm. Moments of Heavy Quark Current Correlators at Four-Loop Order in Perturbative QCD. *JHEP*, 09:075, 2008. [arXiv:0805.3358](#).
- [32] A. Maier, P. Maierhöfer, P. Marquard. The second physical moment of the heavy quark vector correlator at $\mathcal{O}(\alpha_s^3)$. *Phys. Lett.*, B669:88–91, 2008. [arXiv:0806.3405](#).
- [33] A. Maier, P. Maierhöfer, P. Marquard, A. V. Smirnov. Low energy moments of heavy quark current correlators at four loops. *Nucl. Phys.*, B824:1–18, 2010. [arXiv:0907.2117](#).
- [34] A. H. Hoang, V. Mateu, S. Mohammad Zebarjad. Heavy quark vacuum polarization function at $\mathcal{O}(\alpha_s^2)$ and $\mathcal{O}(\alpha_s^3)$. *Nucl. Phys.*, B813:349–369, 2009. [arXiv:0807.4173](#).
- [35] Y. Kiyo, A. Maier, P. Maierhöfer, P. Marquard. Reconstruction of heavy quark current correlators at $\mathcal{O}(\alpha_s^3)$. *Nucl. Phys.*, B823:269–287, 2009. [arXiv:0907.2120](#).
- [36] D. Greynat, S. Peris. Resummation of threshold, low- and high-energy expansions for heavy-quark correlators. 2010. [arXiv:1006.0643](#).
- [37] P. Nogueira. Automatic feynman graph generation. *J. Comput. Phys.*, 105:279–289, 1993.

- [38] R. Harlander, T. Seidensticker, M. Steinhauser. Complete corrections of $\mathcal{O}(\alpha_s)$ to the decay of the Z boson into bottom quarks. *Phys. Lett.*, B426:125–132, 1998. [arXiv:hep-ph/9712228](#).
- [39] T. Seidensticker. Automatic application of successive asymptotic expansions of Feynman diagrams. 1999. [arXiv:hep-ph/9905298](#).
- [40] S. Laporta. High-precision epsilon expansions of massive four-loop vacuum bubbles. *Phys. Lett.*, B549:115–122, 2002. [arXiv:hep-ph/0210336](#).
- [41] K. G. Chetyrkin, J. H. Kühn, P. Mastrolia, C. Sturm. Heavy-quark vacuum polarization: First two moments of the $\mathcal{O}(\alpha_s^3 n_f^2)$ contribution. *Eur. Phys. J.*, C40:361–366, 2005. [arXiv:hep-ph/0412055](#).
- [42] Y. Schröder, M. Steinhauser. Four-loop decoupling relations for the strong coupling. *JHEP*, 01:051, 2006. [arXiv:hep-ph/0512058](#).
- [43] Y. Schröder, M. Steinhauser. Four-loop singlet contribution to the ρ parameter. *Phys. Lett.*, B622:124–130, 2005. [arXiv:hep-ph/0504055](#).
- [44] B. A. Kniehl, A. V. Kotikov. Calculating four-loop tadpoles with one non-zero mass. *Phys. Lett.*, B638:531–537, 2006. [arXiv:hep-ph/0508238](#).
- [45] E. Bejdakic, Y. Schröder. Hypergeometric representation of a four-loop vacuum bubble. *Nucl. Phys. Proc. Suppl.*, 160:155–159, 2006. [arXiv:hep-ph/0607006](#).
- [46] K. G. Chetyrkin, M. Faisst, C. Sturm, M. Tentyukov. ϵ -finite basis of master integrals for the integration-by-parts method. *Nucl. Phys.*, B742:208–229, 2006. [arXiv:hep-ph/0601165](#).
- [47] B. A. Kniehl, A. V. Kotikov. Heavy-quark QCD vacuum polarisation function: Analytical results at four loops. *Phys. Lett.*, B642:68–71, 2006. [arXiv:hep-ph/0607201](#).
- [48] B. A. Kniehl, A. V. Kotikov, A. I. Onishchenko, O. L. Veretin. Strong-coupling constant with flavor thresholds at five loops in the $\overline{\text{MS}}$ scheme. *Phys. Rev. Lett.*, 97:042001, 2006. [arXiv:hep-ph/0607202](#).
- [49] K. G. Chetyrkin, F. V. Tkachov. Integration by parts: The algorithm to calculate beta functions in 4 loops. *Nucl. Phys.*, B192:159–204, 1981.
- [50] S. Laporta. High-precision calculation of multi-loop feynman integrals by difference equations. *International Journal of Modern Physics A*, 15:5087, 2000.
- [51] A. V. Smirnov, A. V. Petukhov. The number of master integrals is finite. 2010. [arXiv:1004.4199](#).

- [52] P. Marquard, D. Seidel. Crusher. an automated integral reduction setup. Unveröffentlicht.
- [53] R. H. Lewis. Fermat user's guide. <http://home.bway.net/lewis>.
- [54] C. W. Bauer, A. Frink, R. Kreckel. Introduction to the GiNaC framework for symbolic computation within the C++ programming language. 2000. [arXiv:cs/0004015](#).
- [55] P. Maierhöfer. *Mehrschleifen-QCD-Korrekturen zu Stromkorrelatoren und Higgs-Zerfällen. Dissertation.* 2009.
- [56] J.A.M.Vermaseren. New features of FORM.
- [57] S. A. Larin, F. V. Tkachov, J. A. M. Vermaseren. The FORM version of MINCER. NIKHEF-H-91-18.
- [58] M. Steinhauser. MATAD: a program package for the computation of MAssive TADpoles. *Computer Physics Communications*, 134:335, 2001.
- [59] B. Buchberger. A theoretical basis for the reduction of polynomials to canonical forms. *SIGSAM Bull.*, 10(3):19–29, 1976. ISSN 0163-5824.
- [60] A. V. Smirnov, V. A. Smirnov. Applying Gröbner bases to solve reduction problems for feynman integrals. *JHEP*, 01:001, 2006. [arXiv:hep-lat/0509187](#).
- [61] A. V. Smirnov. An algorithm to construct Gröbner bases for solving integration by parts relations. *JHEP*, 04:026, 2006. [arXiv:hep-ph/0602078](#).
- [62] A. V. Smirnov. Algorithm FIRE – Feynman Integral REduction. *JHEP*, 10:107, 2008. [arXiv:0807.3243](#).
- [63] A. A. Pivovarov. Renormalization group summation of perturbative series in timelike momentum region. *Nuovo Cim.*, A105:813–826, 1992.
- [64] A. A. Pivovarov. Renormalization group analysis of the tau-lepton decay within QCD. *Z. Phys.*, C53:461–464, 1992. [arXiv:hep-ph/0302003](#).
- [65] F. Le Diberder, A. Pich. The perturbative QCD prediction to R(tau) revisited. *Phys. Lett.*, B286:147–152, 1992.
- [66] G. A. Baker. *Essentials of Padé Approximants*. Academic Press, Inc., 1975.
- [67] P. Masjuan, S. Peris. Padé theory applied to the vacuum polarization of a heavy quark. *Phys. Lett.*, B686:307–312, 2010. [arXiv:0903.0294](#).
- [68] P. A. Baikov, K. G. Chetyrkin, J. H. Kühn. Vacuum polarization in pQCD: First complete $\mathcal{O}(\alpha_s^4)$ result. *Nucl. Phys. Proc. Suppl.*, 135:243–246, 2004.

- [69] P. A. Baikov, K. G. Chetyrkin, J. H. Kühn. R(s) and hadronic tau-Decays in Order α_s^4 : technical aspects. 2009. [arXiv:0906.2987](#).
- [70] S. G. Gorishnii, A. L. Kataev, S. A. Larin. The $\mathcal{O}(\alpha_s^3)$ corrections to $\sigma_{\text{tot}}(e^+e^- \rightarrow \text{hadrons})$ and $\Gamma(\tau^- \rightarrow \tau^- \text{neutrino} + \text{hadrons})$ in QCD. *Phys. Lett.*, B259:144–150, 1991.
- [71] L. R. Surguladze, M. A. Samuel. Total hadronic cross-section in e^+e^- annihilation at the four loop level of perturbative QCD. *Phys. Rev. Lett.*, 66:560–563, 1991 Erratum-ibid. 66, 2416 (1991).
- [72] K. G. Chetyrkin, J. H. Kühn. Mass corrections to the Z decay rate. *Phys. Lett.*, B248:359–364, 1990.
- [73] K. G. Chetyrkin, J. H. Kühn. Quadratic mass corrections of order $\mathcal{O}(\alpha_s^3 m_q^2/s)$ to the decay rate of Z and W bosons. *Phys. Lett.*, B406:102–109, 1997. [arXiv:hep-ph/9609202](#).
- [74] K. G. Chetyrkin, R. V. Harlander, J. H. Kühn. Quartic mass corrections to R(had) at $\mathcal{O}(\alpha_s^3)$. *Nucl. Phys.*, B586:56–72, 2000. [arXiv:hep-ph/0005139](#).
- [75] P. Baikov, K. Chetyrkin, J. Kühn. In Vorbereitung.
- [76] K. Chetyrkin, R. Harlander. In Vorbereitung.
- [77] G. A. Baker, J. L. Gammel, J. G. Wills. An investigation of the applicability of the Padé approximant method. *J. Math. Anal. Appl.*, 2:405–418, 1961.
- [78] A. A. Penin, M. Steinhauser. Heavy-light meson decay constant from QCD sum rules in three-loop approximation. *Phys. Rev.*, D65:054006, 2002. [arXiv:hep-ph/0108110](#).
- [79] K. G. Chetyrkin, J. H. Kühn, M. Steinhauser. Corrections of order $\mathcal{O}(G_F M_t^2 \alpha_s^2)$ to the ρ parameter. *Phys. Lett.*, B351:331–338, 1995. [arXiv:hep-ph/9502291](#).
- [80] J. J. van der Bij, K. G. Chetyrkin, M. Faisst, G. Jikia, T. Seidensticker. Three-loop leading top mass contributions to the ρ parameter. *Phys. Lett.*, B498:156–162, 2001. [arXiv:hep-ph/0011373](#).
- [81] M. Faisst, J. H. Kühn, T. Seidensticker, O. Veretin. Three loop top quark contributions to the ρ parameter. *Nucl. Phys.*, B665:649–662, 2003. [arXiv:hep-ph/0302275](#).
- [82] K. G. Chetyrkin, M. Faisst, J. H. Kühn, P. Maierhofer, C. Sturm. Four-loop QCD corrections to the ρ parameter. *Phys. Rev. Lett.*, 97:102003, 2006. [arXiv:hep-ph/0605201](#).

- [83] R. Boughezal, M. Czakon. Single scale tadpoles and $\mathcal{O}(G_F m_t^2 \alpha_s^3)$ corrections to the ρ parameter. *Nucl. Phys.*, B755:221–238, 2006. [arXiv:hep-ph/0606232](#).
- [84] K. Schilcher, M. D. Tran, N. F. Nasrallah. Spectral functions in qcd. *Nucl. Phys.*, B181:91, 1981.
- [85] D. J. Broadhurst. Chiral Symmetry Breaking and Perturbative QCD. *Phys. Lett.*, B101:423–426, 1981.
- [86] T. H. Chang, K. J. F. Gaemers, W. L. van Neerven. QCD corrections to the mass and width of the intermediate vector bosons. *Nucl. Phys.*, B202:407, 1982.
- [87] L. J. Reinders, H. Rubinstein, S. Yazaki. Hadron properties from QCD sum rules. *Phys. Rept.*, 127:1, 1985.
- [88] A. Djouadi, P. Gambino. Electroweak gauge bosons selfenergies: Complete QCD corrections. *Phys. Rev.*, D49:3499–3511, 1994. [arXiv:hep-ph/9309298](#).
- [89] A. Maier, P. Marquard. In Vorbereitung.
- [90] E. Remiddi. Differential equations for Feynman graph amplitudes. *Nuovo Cim.*, A110:1435–1452, 1997. [arXiv:hep-th/9711188](#).
- [91] M. Caffo, H. Czyz, S. Laporta, E. Remiddi. The master differential equations for the 2-loop sunrise selfmass amplitudes. *Nuovo Cim.*, A111:365–389, 1998. [arXiv:hep-th/9805118](#).
- [92] B. L. Ioffe. QCD at low energies. *Prog. Part. Nucl. Phys.*, 56:232–277, 2006. [arXiv:hep-ph/0502148](#).
- [93] S. Groote, J. G. Korner, A. A. Pivovarov. On the evaluation of a certain class of Feynman diagrams in x-space: Sunrise-type topologies at any loop order. *Annals Phys.*, 322:2374–2445, 2007. [arXiv:hep-ph/0506286](#).
- [94] A. Maier. QCD-Korrelationsfunktionen mit massiven und masselosen Teilchen. Diplomarbeit.
- [95] K. G. Chetyrkin, A. Maier. In Vorbereitung.
- [96] K. G. Chetyrkin, A. Maier. Massless correlators of vector, scalar and tensor currents in position space at orders α_s^3 and α_s^4 : explicit analytical results. [arXiv:1010.1145](#).
- [97] P. A. Baikov, K. G. Chetyrkin, J. H. Kühn. Scalar correlator at $\mathcal{O}(\alpha_s^4)$, Higgs decay into b- quarks and bounds on the light quark masses. *Phys. Rev. Lett.*, 96:012003, 2006. [arXiv:hep-ph/0511063](#).

- [98] E. Franco, V. Lubicz. Quark mass renormalization in the $\overline{\text{MS}}$ and RI schemes up to the NNLO order. *Nucl. Phys.*, B531:641–651, 1998. [arXiv:hep-ph/9803491](#).
- [99] K. G. Chetyrkin, A. Rétey. Renormalization and running of quark mass and field in the regularization invariant and $\overline{\text{MS}}$ schemes at three and four loops. *Nucl. Phys.*, B583:3–34, 2000. [arXiv:hep-ph/9910332](#).
- [100] M. Gorbahn, S. Jäger. Precise $\overline{\text{MS}}$ light-quark masses from lattice QCD in the RI/SMOM scheme. 2010. [arXiv:1004.3997](#).
- [101] L. G. Almeida, C. Sturm. Two-loop matching factors for light quark masses and three-loop mass anomalous dimensions in the RI/SMOM schemes. 2010. [arXiv:1004.4613](#).
- [102] V. Gimenez, et al. Non-perturbative renormalization of lattice operators in coordinate space. *Phys. Lett.*, B598:227–236, 2004. [arXiv:hep-lat/0406019](#).
- [103] W. E. Caswell, G. P. Lepage. Effective Lagrangians for Bound State Problems in QED, QCD, and Other Field Theories. *Phys. Lett.*, B167:437, 1986.
- [104] G. T. Bodwin, E. Braaten, G. P. Lepage. Rigorous QCD analysis of inclusive annihilation and production of heavy quarkonium. *Phys. Rev.*, D51:1125–1171, 1995. [arXiv:hep-ph/9407339](#).
- [105] A. A. Penin, A. A. Pivovarov. Top quark threshold production in gamma gamma collision in the next-to-leading order. *Nucl. Phys.*, B550:375–396, 1999. [arXiv:hep-ph/9810496](#).
- [106] M. Beneke, A. Signer, V. A. Smirnov. Top quark production near threshold and the top quark mass. *Phys. Lett.*, B454:137–146, 1999. [arXiv:hep-ph/9903260](#).
- [107] A. Pineda, A. Signer. Heavy quark pair production near threshold with potential non-relativistic QCD. *Nucl. Phys.*, B762:67–94, 2007. [arXiv:hep-ph/0607239](#).
- [108] R. Harlander, M. Steinhauser. Higgs decay to top quarks at $\mathcal{O}(\alpha_s^2)$. *Phys. Rev.*, D56:3980–3990, 1997. [arXiv:hep-ph/9704436](#).
- [109] K. G. Chetyrkin, R. Harlander, J. H. Kühn, M. Steinhauser. Mass corrections to the vector current correlator. *Nucl. Phys.*, B503:339–353, 1997. [arXiv:hep-ph/9704222](#).
- [110] R. Harlander, M. Steinhauser. $\mathcal{O}(\alpha_s^2)$ corrections to top quark production at e^+e^- colliders. *Eur. Phys. J.*, C2:151–158, 1998. [arXiv:hep-ph/9710413](#).

- [111] P. A. Baikov, K. G. Chetyrkin, J. H. Kühn. Order α_s^4 QCD Corrections to Z and τ Decays. *Phys. Rev. Lett.*, 101:012002, 2008. [arXiv:0801.1821](#).
- [112] G. A. Baker, Jr. Counter-examples to the Baker-Gammel-Wills conjecture and patchwork convergence. *J. Comput. Appl. Math.*, 179(1-2):1–14, 2005. ISSN 0377-0427.
- [113] K. G. Chetyrkin. Quark mass anomalous dimension to $\mathcal{O}(\alpha_s^4)$. *Phys. Lett.*, B404:161–165, 1997. [arXiv:hep-ph/9703278](#).
- [114] J. A. M. Vermaseren, S. A. Larin, T. van Ritbergen. The 4-loop quark mass anomalous dimension and the invariant quark mass. *Phys. Lett.*, B405:327–333, 1997. [arXiv:hep-ph/9703284](#).
- [115] T. van Ritbergen, J. A. M. Vermaseren, S. A. Larin. The four-loop beta function in quantum chromodynamics. *Phys. Lett.*, B400:379–384, 1997. [arXiv:hep-ph/9701390](#).
- [116] K. G. Chetyrkin, M. Steinhauser. Short distance mass of a heavy quark at order α_s^3 . *Phys. Rev. Lett.*, 83:4001–4004, 1999. [arXiv:hep-ph/9907509](#).
- [117] K. G. Chetyrkin, M. Steinhauser. The relation between the $\overline{\text{MS}}$ and the on-shell quark mass at order α_s^3 . *Nucl. Phys.*, B573:617–651, 2000. [arXiv:hep-ph/9911434](#).
- [118] K. Melnikov, T. van Ritbergen. The three-loop on-shell renormalization of QCD and QED. *Nucl. Phys.*, B591:515–546, 2000. [arXiv:hep-ph/0005131](#).

Danksagung

An dieser Stelle würde ich gerne allen ausdrücklich danken, die mich auf vielfältige Weise während der Arbeit an meiner Dissertation unterstützt haben. Leider – oder vielleicht eher glücklicherweise – handelt es sich dabei um weit mehr Personen, als ich hier namentlich erwähnen kann. Deshalb möchte ich neben meiner Familie stellvertretend nur einige wenige Mitglieder des Instituts für Theoretische Teilchenphysik nennen.

Zunächst will ich meinem Doktorvater Prof. Kühn für die Betreuung bei meiner Arbeit danken. Insbesondere die stetige Förderung und die Ermutigungen zu einem Blick über den Tellerrand hinaus – sei es durch den Besuch von Sommer Schulen, Konferenzen oder auch die Betrachtung von interessanten physikalischen Details, die ich sonst sicherlich übersehen hätte – waren eine große Bereicherung für mich. Prof. Steinhauser danke ich für die Übernahme des Korreferats.

Mein besonderer Dank gilt Kostja Chetyrkin, der mir geduldig in zahlreichen Diskussionen sehr viel über perturbative QCD beigebracht hat und auch grob falsche Behauptungen meinerseits immer gutmütig aufnahm (“This I don’t understand”). Ebenso danke ich Peter Marquard und Philipp Maierhöfer für viele lehrreiche Unterhaltungen und eine sehr angenehme, ertragreiche und bisweilen auch amüsante Zusammenarbeit.

Außer Prof. Kühn und Prof. Steinhauser haben auch Peter Marquard und Jörg Rittinger diese Arbeit sorgfältig gelesen; ihnen verdanke ich eine ganze Reihe guter Verbesserungsvorschläge und Fehlerkorrekturen.

Lebenslauf

Persönliche Daten

Name: Andreas Maier
Geburtsdatum: 1. Januar 1983
Geburtsort: Schramberg
Staatsangehörigkeit: deutsch
Familienstand: ledig

Ausbildung

Schulbesuch: 1989-1993 Grundschule Schiltach
1993-2002 Gymnasium Schramberg
Studium: 2002-2007 Universität Karlsruhe (TH)
Diplom: 21. Dezember 2007 mit Note 1,0
(mit Auszeichnung)
Promotion: Physik am Karlsruher Institut für Technologie
seit Januar 2008
Titel der Arbeit: QCD-Stromkorrelatoren und
Quarkmassenbestimmung
Referent: Prof. Dr. J.H. Kühn
Korreferent: Prof. Dr. M. Steinhauser

Lehre

April 2007 - August 2007 Tutorium Theoretische Physik B
Oktober 2008 - Februar 2009 Tutorium Theoretische Physik C
Oktober 2009 - Februar 2010 Tutorium Theoretische Physik E

Konferenzvorträge

März 2008 DPG-Frühjahrstagung in Freiburg
 „Korrelatoren schwerer Quarkströme im Niederenergielimes“
März 2009 DPG-Frühjahrstagung in München
 „Näherungsweise Rekonstruktion von Quarkstromkorrelatoren“
März 2010 DPG-Frühjahrstagung in Bonn
 „Korrekturen höherer Ordnung
 zu nichtdiagonalen Quarkstromkorrelatoren“
Juni 2010 LoopFest IX in Stony Brook
 „Quark current correlators
 and precise charm and bottom masses“

Publikationsliste

- [119] A. Maier, P. Maierhöfer, P. Marquard. Higher moments of heavy quark correlators in the low energy limit at $\mathcal{O}(\alpha_s^2)$. *Nucl. Phys.*, B797:218–242, 2008. [arXiv:0711.2636](#).
- [120] A. Maier, P. Maierhöfer, P. Marquard. Higher moments of heavy quark correlators in the low energy limit at $\mathcal{O}(\alpha_s^2)$. *Nucl. Phys. Proc. Suppl.*, 183:209–214, 2008.
- [121] A. Maier, P. Maierhöfer, P. Marquard. The second physical moment of the heavy quark vector correlator at $\mathcal{O}(\alpha_s^3)$. *Phys. Lett.*, B669:88–91, 2008. [arXiv:0806.3405](#).
- [122] Y. Kiyo, A. Maier, P. Maierhöfer, P. Marquard. Reconstruction of heavy quark current correlators at $\mathcal{O}(\alpha_s^3)$. *Nucl. Phys.*, B823:269–287, 2009. [arXiv:0907.2120](#).
- [123] A. Maier, P. Maierhöfer, P. Marquard, A. V. Smirnov. Low energy moments of heavy quark current correlators at four loops. *Nucl. Phys.*, B824:1–18, 2010. [arXiv:0907.2117](#).
- [124] K. G. Chetyrkin, J. H. Kühn, A. Maier, P. Maierhöfer, P. Marquard, M. Steinhauser, C. Sturm. Charm and bottom quark masses: an update. *Phys. Rev.*, D80:074010, 2009. [arXiv:0907.2110](#).
- [125] K. G. Chetyrkin, A. Maier. Wilson Expansion of QCD Propagators at Three Loops: Operators of Dimension Two and Three. *JHEP*, 01:001, 2010. [arXiv:0911.0594](#).
- [126] K. G. Chetyrkin, A. Maier. Massless correlators of vector, scalar and tensor currents in position space at orders α_s^3 and α_s^4 : explicit analytical results. [arXiv:1010.1145](#).